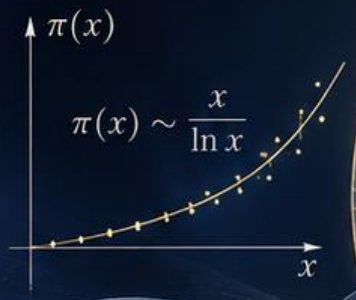
统一素数关系理论

—— Goldbach、Twin 的证明与经典素数命题的共同母体

$2n = p + q$
(Goldbach)

$p,\ p+2$
(Twin)



统一的
素数关系结构

$\sigma,\ \delta$

$$\sigma(n) = \sum_{p \mid n} 1$$

$$\delta(n) = \sum_{p \mid n} \delta_p$$





$$\begin{cases} \pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x} \\ \displaystyle\sum_{p \le x} \frac{1}{p} \sim \ln\ln x \\ p_n \sim n \ln n \\ \cdots \end{cases}$$

任毅飞

尘缘聚散原无定

莫向空门觅旧根

《统一素数关系理论》

统一素数关系理论 · 中文版

作者　任毅飞

作者身份　独立研究者

电子邮箱　zentiger@qq.com

ORCID　0009-0009-1373-9609

微信　ryfweixin

GitHub（本书交互教学网页和软件）　https://github.com/qiaoranjushi/ghtmath

强烈推荐互动课堂　https://qiaoranjushi.github.io/ghtmath/

本书 DOI　https://doi.org/10.5281/zenodo.24144189

本书目前为预印本，尚未与出版社签约。如您认为本书有出版价值，欢迎联系探讨合作。

本人为独立研究者，若您愿意资助我的研究工作，也同样感激不尽。

思想来源　本书底层思想源自《数学的地基：GHT 生成履历理论概论》（*Foundations of Mathematics: An Introduction to Generative History Theory, GHT*）

https://doi.org/10.5281/zenodo.23662772

版权与许可　© 2026 任毅飞。除另有注明外，本书采用 知识共享署名—非商业性使用 4.0 国际许可协议（CC BY-NC 4.0）授权。任何人在遵守署名与非商业性使用条件的前提下，可以复制、传播、展示、改编和再创作本书内容；涉及第三方材料或另有版权说明的内容，则以相应标注为准。

arXiv 背书请求　我目前正在寻求 arXiv math.NT（Number Theory，数论）板块的投稿背书。如果您具备该板块的背书资格，并愿意支持我的投稿，欢迎访问以下链接：

https://arxiv.org/auth/endorse?x=X4R44M

感谢您的帮助。

作者说明

我仍是一名数学初学者，也才刚刚开始对这些问题进行系统探索。本书记录的是我在当前阶段对素数关系、统一结构与相关证明问题的理解、尝试和阶段性成果，而不是一个拒绝修改的终点。受限于知识积累、研究经验与表达能力，书中仍可能存在定义不够凝练、论证尚可加强、术语或形式化处理有待校正之处，也可能存在我目前尚未意识到的错误。数学之所以值得长期投入，正在于它允许公开检验、独立复核、批评、修正与不断重建。因此，我诚挚欢迎读者、研究者和所有对此主题感兴趣的朋友提出意见、质疑、反例、修订建议与更好的证明方案。所有严谨而具体的反馈，都会成为这项工作继续打磨和前进的重要组成部分。

目　　录

作者说明.....iii
前言　从素数的孤立谜题到统一关系世界.....1
一　素数：数学最古老的对象之一，也是最年轻的问题之一.....1
二　从欧几里得、欧拉到黎曼：素数从“原子”走向“总体结构”.....2
三　Goldbach：从素数身份走向固定和值关系.....2
四　Twin 与 Polignac：另一条基本轴线是固定差.....3
五　Landau 四题：二十世纪初对素数难题的一次集中命名.....4
六　二十世纪与二十一世纪：伟大推进不断逼近问题的最低阶核心.....5
七　两座孤峰进入同一山脉：本书的核心成果.....6
八　真正的转折：从“一个猜想一种语言”回到共同母体.....8
九　第一篇：固定算术身份谱与原子关系母体.....9
十　第二篇：有限移动视界——无限关系的有限入口.....10
十一　第三篇：关系切片、导出几何与量词结构.....10
十二　第四篇：有限控制几何与 Goldbach 的终端饱和结构.....11
十三　第五篇：无限关系的精准架构与 Twin 的持续非灭绝结构.....11
十四　第六篇：经典命题的统一编译与方法边界.....11
十五　第七篇：RenSpectrum——让理论进入可执行世界.....12
十六　从两个经典命题到一门关系理论.....13
十七　写在阅读之前.....14
第一篇　固定算术身份谱与原子关系母体.....16
导言　从“许多素数问题”回到“一张固定谱”.....17
摘要.....18
第一章　第一对象：固定算术身份谱.....21
1.1　整数线先于任何具体关系.....21
1.2　素数指示函数只是身份谱的一个投影.....22
1.3　一张谱可以有多个字段.....23
第二章　身份与关系：不能交换的两个层级.....24
2.1　关系选择位置，不生产位置.....24
2.2　三个层级.....24
第三章　为什么还需要原子坐标.....27
3.1　整数谱与原子谱只是同一对象的两个视图.....27
第四章　共享坐标上的两种基本运算.....29

第五章　乘法压缩：奇数乘法的精确搬运 30
第六章　加法展开：二奇数关系的同坐标表达 31
第七章　不可约原子：奇素数从乘法内部显现 32
7.1　素数 2 的位置 33
第八章　唯一原子分解与乘法履历 34
8.1　原子分解与身份字段的对应 34
第九章　原子射线：乘法生成的线性化 36
第十章　非原子覆盖与下一原子的递归生成 37
10.1　覆盖不是分割 37
第十一章　从原子点到关系对象 40
第十二章　关系出生律：一个新原子产生一整行 41
第十三章　射线—关系对偶：同一个原子的双重展开 43
第十四章　组合放大与区块接缝 45
14.1　关系接缝不是一个点 45
第十五章　持久嵌入：历史关系为什么不丢失 47
15.1　确认关系与候选关系必须区分 47
第十六章　关系行平移：历史不是随机重采样 49
第十七章　无损和—差坐标 50
17.1　可实现格点 51
17.2　和值与差值不是两套世界 51
第十八章　从“关系实例”到“关系切片” 53
第十九章　从二原子切片推广到一般位置映射 55
19.1　固定和是位置映射 55
19.2　固定差是位置映射 56
19.3　有限模板是位置映射束 56
19.4　等差束是参数化模板 56
19.5　仿射关系 56
19.6　多项式拉回 57
第二十章　窗口、相邻素数与完整因子身份也是切片 58
20.1　窗口占据 58
20.2　窗口空读 58
20.3　相邻素数索引 58
20.4　完整因子集合切片 59
第二十一章　统一关系规范形 60
21.1　命题只在最外层增加量词 60
第二十二章　关系保真：为什么不能过早压成一个数字 62

22.1　关系状态的最低信息 62
第二十三章　高阶关系的自然入口 63
第二十四章　有限层母体的正式定义 64
第二十五章　母体动力学的零阶闭合 65
第二十六章　一个完整的小例子 66
26.1　固定整数身份谱 66
26.2　原子射线 66
26.3　关系出生层 67
26.4　和值碰撞为何不能压掉关系 67
第二十七章　第一篇基础定理总表 69
第二十八章　从关系切片到量词结构 71
第二十九章　关系母体的阅读方式 72
结语　从一列素数到一张可读取的关系谱 72
第二篇　有限移动视界、关系还原与永久保存 75
摘要 76
第一章　固定身份为什么不能代替关系 78
第二章　关系还原：什么叫真正保存一个关系 80
2.1　和—差坐标是无损的 81
2.2　单独和值不是无损的 81
2.3　关系研究的价值恰在这里 81
第三章　持久关系过滤：旧关系为什么永远不会丢失 83
第四章　候选关系与确认关系 86
第五章　关系保真状态：为什么一个计数通常不够 88
5.1　显式例子 88
第六章　统一移动视界：有限窗口如何获得零误差原子认证 91
第七章　素数平方：移动视界的天然离散边界 94
第八章　真实死亡层：一个合数只第一次死亡一次 96
第九章　关系保真筛：从端点死亡到关系死亡 98
9.1　固定和值关系槽 98
9.2　终端精确性 99
第十章　有限关系的终端认证 100
第十一章　从候选壳晋升到永久关系骨架 102
第十二章　关系履历：对象不仅有结果，还有生成历史 103
第十三章　出生与死亡存在严格时间错位 105
第十四章　移动视界不是创造关系，而是终端读取关系 106
第十五章　统一视界与读出适配视界 107

15.1 固定和值读出的适配终端 107
15.2 固定有限端点读出的适配终端 107
15.3 窗口读出的适配终端 107
15.4 一般有限关系的适配终端 108
第十六章 关系还原的统一规范形 109
第十七章 有限视界如何进入无限量词 110
17.1 无限回归 110
17.2 逐参数全称纤维 110
17.3 窗口全称 111
17.4 任意长度关系 111
17.5 参数无限 111
17.6 逐索引全称谓词 111
第十八章 有限—无限入口定理 113
第十九章 不同全称量词如何进入同一个母体 114
第二十章 批量论证的有限基础 115
第二十一章 有限闭合的四种基本形式 116
21.1 有限商闭合 116
21.2 传播闭合 116
21.3 累计势闭合 116
21.4 坏状态排除闭合 116
第二十二章 四个基本例子 117
22.1 固定和值 117
22.2 固定差 117
22.3 平方窗口 117
22.4 有限模板 118
第二十三章 统一动力学：出生、消解、晋升、持久、读出 119
第二十四章 本篇基础定理总表 121
第二十五章 关系层不能被固定谱抹去 123
第二十六章 有限层与全局命题之间的纪律 124
第二十七章 关系保真筛的通用技术接口 125
第二十八章 从有限终端到统一关系理论 126
结语 无限关系的数学入口是有限终端 126
第三篇 关系切片、导出几何、量词结构与批量论证 128
摘要 129
第一部 二原子关系平面与导出几何 133
第一章 二原子关系平面：和值与差值的共同母体 134

第二章　关系平面的三个天然方向 136
2.1　固定和值：竖直切片 136
2.2　固定差：水平切片 136
2.3　固定较大原子：斜向关系星 137
2.4　固定积：同一平面的双曲叶 138
2.5　总乘法深度恒等式 139
第三章　壳层交叉、正交生成与反射—平移 142
3.1　两族端点壳 142
3.2　壳深度因子化 143
3.3　新原子出生的壳层几何 144
3.4　正交生成方向 144
3.5　Prime gap 是关系网格的局部度量 145
3.6　反射与平移：同一个原子集合的两种自交 145
第四章　低阶见证纪律：统一不能以丢失关系为代价 148
第二部　低阶见证场与有限原子星座 148
第五章　有限 Goldbach 见证场 149
第六章　Twin 是固定和值见证的相邻列持续 150
第七章　固定差计数与见证持续的精确恒等式 152
第八章　多列持续与一般 prime constellations 154
第九章　时间方向与空间方向 156
第三部　一般关系语言与关系规范形 156
第十章　一般关系切片的定义 157
第十一章　统一关系规范形 159
第十二章　固定和、固定差与连续固定差 160
12.1　固定和 160
12.2　固定差 160
12.3　连续固定差 160
第十三章　加权反射与仿射关系 161
13.1　Lemoine / Lévy 型加权反射 161
13.2　一般仿射关系 161
第十四章　有限模板与 prime tuples 162
第四部　高阶仿射组织与等差原子链 162
第十五章　Green–Tao 等差原子链 163
第十六章　等差链由同差二原子关系连续拼接 165
第十七章　三端链与固定和值镜像 166
第十八章　任意长度等差链的固定和值镜像折叠 167

第十九章　等差链的平方视界 168
19.1　长链可能跨越平方边界 169
第二十章　等差链的单素数禁止类 170
第二十一章　有限 CRT 层的链容量 172
第二十二章　长链的内禀步长容量 173
第二十三章　有限层非空模型 175
第二十四章　高阶组织出生律 176
第二十五章　Green–Tao 定理在统一关系语言中的表达 178
25.1　参考定理 178
第二十六章　等差链向 Goldbach 高重数的严格输送 179
第二十七章　一个五项等差链例子 181
第五部　窗口、索引、拉回与完整因子身份 181
第二十八章　窗口关系 182
28.1　Legendre 窗口 182
28.2　Oppermann 双窗口 182
28.3　Brocard 连续素数平方窗口 182
第二十九章　相邻素数指标关系 184
29.1　Andrica 型关系 184
29.2　Firoozbakht 型关系 184
第三十章　指数与多项式拉回 185
30.1　Mersenne 型指数拉回 185
30.2　Bunyakovsky 型多项式拉回 185
30.3　Schinzel H 多项式束 185
第三十一章　完整因子身份关系 186
31.1　Grimm 型因子匹配 186
31.2　Erdős–Woods 型身份块 186
第六部　量词结构：全称、无限与其他整体要求 187
第三十二章　量词不是装饰：它决定命题的全局类型 188
32.1　有限读取 188
32.2　无限回归 188
32.3　逐参数全称纤维 188
32.4　窗口全称 188
32.5　任意长度 189
32.6　参数无限 189
32.7　逐索引全称谓词 189
32.8　身份块分离 190

第三十三章　为什么“全称”与“无限”必须分开 191
33.1　全称纤维要求“每一列非空” 191
33.2　无限回归要求“总命中不断增长” 191
第七部　批量论证与全局闭合 191
第三十四章　批量论证：一次证明覆盖整个参数族 192
34.1　批量论证不是批量枚举 192
第三十五章　全称纤维的批量判定 194
35.1　统一正下界 194
35.2　失败状态排除 194
35.3　最小反例排除 194
第三十六章　无限回归的批量判定 195
36.1　直接增长 195
36.2　累计净势 195
第三十七章　四类基本闭合方式 197
37.1　有限商闭合 197
37.2　传播闭合 197
37.3　累计势闭合 197
37.4　坏状态排除闭合 197
37.5　局部有限—整体全局拼接 198
第八部　关系等价、可执行语法与总定理 199
第三十八章　关系等价与关系不同 200
38.1　Goldbach 原子坐标与普通素数坐标 200
38.2　固定差与关系平面水平切片 200
38.3　计数相同不构成关系等价 201
第三十九章　关系语言的最小操作 202
R1　位置映射 202
R2　身份读取 202
R3　有限逻辑与有限比较 202
R4　窗口聚合 202
R5　外层量词 202
第四十章　从数学语法到可执行关系语言 203
第四十一章　三个自定义关系例子 204
41.1　交叉镜像关系 204
41.2　二次双原子关系 204
41.3　反射—平移耦合关系 204
第四十二章　关系类型与量词类型是两个独立坐标 206

第四十三章　经典关系的统一表 207
第四十四章　批量论证的最低完整条件 208
44.1　关系保真 208
44.2　有限局部正确 208
44.3　参数覆盖 208
44.4　量词闭合 208
第四十五章　高阶结构何时有价值 210
第四十六章　本篇基础定理总表 211
结语　一张谱，不是一种关系 214
第四篇　有限控制几何、局部阻塞与关系筛 218
摘要 219
第一部　有限控制几何 225
第一章　从关系语言进入控制几何 226
第二章　任意有限阶关系空间 227
2.1　素数间隔单元 227
第三章　乘法深度张量 228
第四章　顶点、边、面与浅乘法深度 229
第五章　关系轨道 230
第六章　原子顶点预像定理 231
第七章　有限控制深度 232
第八章　相位周期与有限控制周期 233
第二部　局部阻塞与许可 235
第九章　局部阻塞的统一定义 236
第十章　局部许可不等于整体占据 237
第十一章　有限偏移模板的局部指纹 238
第十二章　模板局部许可 240
第十三章　一个被完全阻塞的模板 241
第十四章　等差模板的局部容量 242
第十五章　有限轮局部容量 244
第三部　CRT 生存树与首次局部淘汰 245
第十六章　从有限容量到 CRT 生存树 246
16.1　逐层控制模数 246
16.2　存活父节点的精确分叉 246
16.3　生存比例 247
16.4　完全阻塞就是整棵树终止 248
第十七章　首次局部淘汰守恒 250

17.1 首次局部淘汰集 250
17.2 首次淘汰的精确计数 250
17.3 从相位 first-killer 到整数 first-killer 251
第四部 真实死亡、关系字母表与关系保真筛 253
第十八章 普通整除与真实死亡 254
第十九章 关系 first-killer 255
第二十章 关系字母表 256
20.1 端点身份字母 256
20.2 关系身份字 256
20.3 固定和值的粗字母表 256
20.4 Twin 单平方视界的净化字母表 257
20.5 关系字母表与关系保真 257
第二十一章 关系保真筛 259
第二十二章 为什么“剩多少”不是充分状态 260
第二十三章 固定和值是二点反射相关 262
第二十四章 有限模信息不能决定反射配对 263
第二十五章 关系筛与元素筛的分工 264
第五部 乘法深度奇偶通道 265
第二十六章 Liouville 奇偶身份 266
第二十七章 真实死亡的奇偶翻转 267
第二十八章 奇偶双通道转移 268
第二十九章 关系四通道 269
第三十章 乘法深度上界 270
第三十一章 奇通道立方根认证 271
第三十二章 立方根认证与固定和值存在的层级区别 272
第三十三章 $X1/4$ 层的 $P1/P3$ 分解 273
第三十四章 简单单调比例为什么不够 274
第三十五章 从奇偶障碍到反射定位 275
第六部 固定和值：终端饱和型关系筛 276
第三十六章 从一般关系筛进入固定和值 277
第三十七章 母—子读出继承 278
第三十八章 为什么固定和值是最低阶精确关系之一 279
第三十九章 有限历史与固定和值支撑 280
第四十章 关系行平移 281
第四十一章 固定和值重数递推 282
第四十二章 终端视界算子 283

第四十三章　固定和值自然终端冻结 284
第四十四章　自然终端段 285
第四十五章　换回偶数轴：素数间隔决定终端段宽度 287
第四十六章　缺口与第一缺口 288
第四十七章　固定和值内部的互反运动 289
第四十八章　有限关系证书 290
第七部　加法—乘法精准补位对象 291
第四十九章　位置层：原子与乘法占位的互补身份 292
第五十章　有限视界中的暂未读出状态 293
第五十一章　固定和值只是重新配对 294
第五十二章　关系槽耗尽定理 295
第五十三章　逐槽精准补位恒等式 296
第五十四章　整体关系槽守恒 297
第五十五章　双乘法占位的责任分解 299
第五十六章　原子出生与独占乘法作用的时间错位 301
第五十七章　具体关系槽：$N = 12$ 302
第五十八章　具体关系槽：$N = 16, N = 18, N = 20, N = 40$ 303
58.1　$N = 16$ 303
58.2　$N = 18$ 303
58.3　$N = 20$ 304
58.4　$N = 40$ 304
第八部　终端饱和、全称读出与标准工具 306
第五十九章　Goldbach 的关系完备性与准确位置 307
第六十章　终端三重等价 309
第六十一章　读出—终端落位定理 310
第六十二章　完整有限截面 311
第六十三章　支撑与重数 313
第六十四章　八个标准关系筛算子 314
64.1　出生算子 314
64.2　投影算子 314
64.3　终端算子 314
64.4　缺口算子 314
64.5　第一缺口算子 314
64.6　机会算子 314
64.7　证书算子 315
64.8　饱和算子 315
第六十五章　终端饱和型与持续非灭绝型 316

65.1　终端饱和型 316
65.2　持续非灭绝型 316
第六十六章　固定和值与固定差为什么不能使用同一终端逻辑 317
第九部　关系筛的能力边界与一般接口 318
第六十七章　有限终端与全称闭合的层级分工 319
第六十八章　简单基数容量不能替代反射定位 320
第六十九章　关系保真筛的四个可复用接口 321
69.1　关系保真接口 321
69.2　原子出生—关系行接口 321
69.3　乘法深度通道接口 321
69.4　失败证书接口 321
第七十章　一个新的关系怎样进入有限控制几何 322
第七十一章　本篇基础定理总表 323
结语　关系筛真正筛的是什么 325
第五篇　无限关系的精准架构 329
摘要 330
第一部　无限量词不是一个概念 336
第一章　从有限终端进入无限结构 337
第二章　七种主要全局接口 338
2.1　无限回归 338
2.2　逐参数全称纤维 338
2.3　窗口全称 338
2.4　任意长度 338
2.5　参数无限 339
2.6　逐索引全称谓词 339
2.7　身份块分离 339
第三章　无限回归的精确判据 341
第四章　逐参数全称纤维的精确判据 342
第五章　窗口全称、任意长度与参数无限 343
5.1　窗口全称 343
5.2　任意长度 343
5.3　参数无限 343
第六章　逐索引全称与身份块分离 344
6.1　逐索引全称 344
6.2　身份块分离 344
第七章　量词决定证明接口 345

第二部　有限周期与无限持续 346
第八章　有限控制层的精确周期 347
第九章　有限周期不等于无限关系周期 348
第十章　三类接缝 349
10.1　生成接缝 349
10.2　相位接缝 349
10.3　平方接缝族 349
第三部　持续非灭绝型关系筛 350
第十一章　为什么固定差没有共同终端 351
第十二章　单位差是最小持续关系 352
第十三章　单位差母—子继承 353
第十四章　连续素数平方视界 354
第十五章　平方视界唯一归属 355
第十六章　平方接缝闭合 356
第十七章　旧双逃逸关系 357
第十八章　单层净化 358
第十九章　平方视界精确 Twin 公式 359
第二十章　关系死亡留下三原子见证 360
第二十一章　单余因子单死亡 361
第二十二章　清洁区与吸收区 362
第二十三章　有限吸收资源池 363
第二十四章　死亡匹配与有限强制 364
第二十五章　局部移动区间 365
第二十六章　关系空间与资源空间的尺度分离 366
第二十七章　吸收资源的线性上界 367
第二十八章　资源半衰 368
第二十九章　资源寿命 369
第三十章　有限寿命与全局容量是两个层次 370
第四部　一般固定模板的供给—吸收理论 371
第三十一章　从 Twin 推广到任意固定偏移模板 372
第三十二章　模板平方视界 373
第三十三章　关系供给 BH 374
第三十四章　真实关系 TH 与死亡 DH 375
第三十五章　单层净化的一般形式 376
第三十六章　统一吸收资源池 378
第三十七章　wheel 与吸收复用度 379

第三十八章　吸收容量定理 381
第三十九章　资源池的纯结构上界 383
第四十章　精确容量与结构容量 384
第四十一章　净关系势 385
第四十二章　两种有限关系证书 387
42.1　固定谱资源证书 387
42.2　结构证书 387
第四十三章　吸收复用度的几个基本值 388
第四十四章　Twin 是 $\mu = 1$ 的最小模型 389
第五部　从单视界到无限回归 390
第四十五章　跨视界累计账本 391
第四十六章　累计净势无限判据 392
第四十七章　更强的逐窗证书 394
第四十八章　“没有最后一个成功视界”的等价形式 395
第四十九章　单资源寿命在累计架构中的准确位置 396
第五十章　局部许可、有限净势与无限回归是三层不同结论 397
第一层　局部许可 397
第二层　有限视界证书 397
第三层　无限回归 397
第六部　Twin 在精准无限架构中的位置 398
第五十一章　Twin 的完整有限状态 399
第五十二章　Twin 的全局命题怎样表达 400
第五十三章　一般固定差 401
第五十四章　一般 prime tuple 402
第七部　其他无限接口的批量结构 403
第五十五章　Sophie Germain 404
第五十六章　Mersenne 405
第五十七章　Bunyakovsky 与 Schinzel H 406
第五十八章　Green–Tao 的任意长度接口 407
第五十九章　Goldbach、Legendre 与全称型接口 408
第六十章　Brocard、Andrica、Firoozbakht 与 Grimm 409
第六十一章　Erdős–Woods 与身份块分离 410
第八部　批量论证的标准结构 411
第六十二章　批量证明不是批量计算 412
第六十三章　无限回归的三种标准闭合 413
63.1　逐窗正证书 413

63.2　累计净势 413
63.3　直接累计下界 413
第六十四章　全称型的三种标准闭合 414
64.1　统一正下界 414
64.2　有限商覆盖 414
64.3　最小失败排除 414
第六十五章　任意长度型的标准闭合 415
第六十六章　参数无限型的标准闭合 416
第九部　关系级有限证书 417
第六十七章　关系对象与证书对象应该一致 418
第六十八章　一般 Twin 单关系证书 419
第六十九章　足厚单主链证书 422
第七十章　移动视界与关系证书是同一原则的两个尺度 424
第十部　有限计算验收 425
第七十一章　905 个连续平方视界 426
第七十二章　结构净势的同一批有限数据 428
第七十三章　历史资源复用的有限验收 429
第七十四章　关系级证书的计算比较 430
第十一部　参数字典 432
第七十五章　无限关系模块的参数含义 433
75.1　H：固定偏移模板 433
75.2　$p < r < s$：连续奇素数 433
75.3　$\Delta = s - r$：当前 prime gap 433
75.4　BH：关系供给 433
75.5　TH：真实关系 433
75.6　DH：真实死亡 433
75.7　$U(r, s)$：吸收资源池 433
75.8　Q：wheel 控制素数集合 433
75.9　MQ：wheel 模数 434
75.10　$\mu H(Q)$：吸收复用度 434
75.11　$CH\mathrm{exact}$：固定谱资源容量 434
75.12　$CH\mathrm{struct}$：结构容量 434
75.13　eH：净关系势 434
75.14　$\mathcal{E}H$：累计净关系势 434
第七十六章　量词模块的参数含义 435
X 435

θ 435
x 435
k 435
$CR(X)$ 435
$C(\theta)$ 435
$W(n)$ 435
$L(X)$ 435
$P(X)$ 435
$F(X)$ 436
第十二部　有限证书进入经典命题的形式证明 437
第七十七章　证书作为定理接口 438
77.2　无限回归证书传递 438
77.3　其他量词的证书入口 439
第七十八章　Twin 的形式证明与无限闭合 440
第七十九章　一般经典命题怎样调用第五篇 442
79.1　固定 prime tuple 442
79.2　Goldbach 型全称 fiber 442
79.3　窗口全称 442
79.4　任意长度 442
79.5　参数无限 443
79.6　统一调用链 443
第十三部　本篇核心定理表 444
第八十章　无限量词定理 445
T1　无限回归计数判据 445
T2　全称纤维判据 445
T3　窗口全称判据 445
T4　任意长度判据 445
T5　参数无限判据 445
第八十一章　持续型关系筛定理 446
T6　平方视界精确 Twin 公式 446
T7　单余因子单死亡 446
T8　清洁区 446
T9　资源半衰 446
T10　资源有限寿命 446
第八十二章　一般模板供给—吸收定理 447
T11　单层净化 447
T12　吸收容量 447

T13　结构资源上界 447
T14　精确净势下界 447
T15　结构净势下界 447
T16　累计精确净势无限判据 447
T17　累计结构净势无限判据 447
第八十三章　关系级证书定理 448
T18　一般 Twin 单关系证书 448
T19　足厚单主链证书 448
T20　全称 fiber 证书传递 448
T21　无限回归证书传递 448
T22　Twin 累计净势证书 449
T23　经典命题证书接口 449
结语　无限是有限证书的无界累计 450
第六篇　经典命题的形式证明、关系切片全集与方法边界 453
摘要 454
第一部　统一母体的承载形式 460
第一章　关系母体先于具名问题 461
第二章　统一母体的五个层级 462
2.1　固定身份层 462
2.2　原子层 462
2.3　关系层 462
2.4　视界层 462
2.5　读出层 463
第三章　任意有限阶关系空间 464
第四章　乘法深度张量与原子顶点骨架 465
第五章　顶点、边、面与浅乘法深度 466
第六章　关系轨道 467
第七章　原子顶点预像定理 468
第八章　一个关系的统一四元表示 469
8.1　关系轨道 ΓF 469
8.2　目标深度 B 469
8.3　观察区域 $\mathcal{R}$ 469
8.4　整体要求 Q 469
第九章　有限关系终端认证 471
第十章　有限世界怎样组成全局关系 472
第二部　六种关系几何 474

第十一章　固定关系切片 475
第十二章　高阶仿射关系 476
第十三章　非线性关系轨道 477
第十四章　稀疏指数关系轨道 478
第十五章　区间与度量关系 479
第十六章　统计与谱关系 480
第三部　经典命题的形式证明与关系切片全集 481
本部的形式证明规范 481
第十七章　Goldbach：固定和值的全称纤维 482
17.A　Goldbach 的形式等价定理 482
第十八章　Lemoine / Lévy：加权反射纤维 484
18.A　Lemoine / Lévy 的形式等价定理 484
第十九章　弱 Goldbach：关系阶数升为三元 486
19.A　弱 Goldbach 的三元形式证明 486
第二十章　Chen：关系几何不变，目标深度放宽 487
20.A　Chen 型命题的形式证明 487
第二十一章　Twin：单位固定差的无限回归 488
21.A　Twin 的形式等价与证书链 488
第二十二章　Polignac：整个固定差族 490
22.A　Polignac 的形式证明 490
第二十三章　Sophie Germain 与 safe prime：斜线关系 492
23.A　Sophie Germain / safe prime 的形式证明 492
第二十四章　Hardy–Littlewood prime k-tuple 493
24.A　Hardy–Littlewood prime k-tuple 的形式证明 493
第二十五章　Green–Tao：任意长等差关系 495
25.A　Green–Tao 的形式证明 495
第二十六章　Green–Tao 向固定和值的镜像折叠 496
26.A　镜像折叠定理 496
第二十七章　Dirichlet：同余子格上的无限占据 497
27.A　Dirichlet 定理的关系形式 497
第二十八章　PNT 与 PNT in AP：coarse density 498
28.A　PNT 与 PNT in AP 的统计形式 498
第二十九章　Bertrand：移动区间占据 499
29.A　Bertrand 定理的窗口形式证明 499
第三十章　Legendre：整数平方窗口 500
30.A　Legendre 命题的窗口形式证明 500

第三十一章　Oppermann：双窗口全称 501
31.A　Oppermann 的双窗口形式证明 501
第三十二章　Brocard：连续素数平方窗口计数 502
32.A　Brocard 的平方窗口计数形式 502
第三十三章　Andrica：prime-gap 度量关系 503
33.A　Andrica 的等价度量形式 503
第三十四章　Firoozbakht：相邻素数的归一化增长 504
34.A　Firoozbakht 的等价对数形式 504
第三十五章　$n2+1$：二次轨道 505
35.A　$n2+1$ 的形式证明 505
第三十六章　Bunyakovsky：一般多项式轨道 506
36.A　Bunyakovsky 的形式证明 506
第三十七章　Schinzel H：多项式束 507
37.A　Schinzel H 的形式证明 507
第三十八章　Mersenne：指数稀疏轨道 508
38.A　Mersenne prime 的形式证明 508
第三十九章　Fermat：双指数稀疏轨道 509
39.A　Fermat prime 轨道的形式证明 509
第四十章　Waring–Goldbach：非线性固定和流形 510
40.A　Waring–Goldbach 型命题的形式证明 510
第四十一章　Grimm：完整因子集合与匹配 511
41.A　Grimm 的匹配形式证明 511
第四十二章　Erdős–Woods：身份块分离 512
42.A　Erdős–Woods 的身份块形式证明 512
第四十三章　Landau 四题的四种不同读法 513
43.A　Landau 四题的统一形式表 513
第四十四章　RH / GRH：全局谱接口 515
44.A　RH / GRH 的全局谱形式 515
第四部　卷积历史、终端因子化与派生结构 516
卷积指数：一个参数编码全部有限关系阶数 516
有限终端卷积因子化 516
Coarse–Fine fiber 零均值 517
七个派生关系结构 517
第五部　高阶关系如何向低阶关系传递信息 519
第四十五章　关系之间的结构映射 520
第四十六章　无损高阶—低阶传递 521

第四十七章　固定和值见证场向 prime constellations 的反向读取 522
第四十八章　高阶存在不等于低阶全称 523
第四十九章　低阶关系为什么最少冗余 524
第五十章　低阶命题拒绝的四种放宽 525
50.1　增加变量 525
50.2　放宽乘法深度 525
50.3　放宽关系纤维 525
50.4　允许异常集合 525
第五十一章　结构可以升阶，见证不能丢失 526
第六部　经典筛法在统一母体中的位置 527
第五十二章　埃拉托斯特尼筛：乘法占位 528
第五十三章　Brun 筛：多端 rough relation 529
第五十四章　Selberg 筛：优化局部排除，不增加缺失身份 530
第五十五章　组合筛与线性筛：浅乘法深度 531
第五十六章　大筛：多模平均控制 532
第五十七章　Bombieri–Vinogradov：平均模分布 533
第五十八章　Hardy–Littlewood 圆法：固定和的频率读出 534
第五十九章　为什么三元与高阶加法更有平滑 535
第六十章　Chen：放宽深度而保持关系 536
第六十一章　GPY 与 Maynard–Tao：差值进入有限带 537
第六十二章　Green–Tao：高阶组合结构 538
第六十三章　解析 L-函数：全局谱 539
第六十四章　Pocklington、Lucas、APR、ECPP：有限证书 540
第七部　Primorial coarse–fine 与解析关系筛 541
第六十五章　有限循环群上的 coarse 空间 542
第六十六章　Fourier 支撑严格分离 543
第六十七章　卷积严格解耦 544
第六十八章　Primorial 壳层 545
第六十九章　强制筛方向与横向创新 546
第七十章　coarse energy 递推 547
第七十一章　局部因子传输 548
第七十二章　有限 Duhamel 公式 549
第八部　parity、child-mode 与二元关系边界 550
第七十三章　乘法深度 parity 551
第七十四章　rough survivor 与 signed survivor 552
第七十五章　固定和值的 parity-resolved 分解 553

第七十六章　parity saturation 的吸收性质 554
第七十七章　第一次灭绝与关系图顶点覆盖 555
第七十八章　ordinary death 与 true death 556
第七十九章　Child-mode anisotropy 557
第八十章　Goldbach 与固定差的解析对偶 559
第八十一章　平均控制与 all-target 的距离 560
第八十二章　pure positive energy 的信息边界 561
第八十三章　单尺度 reflection gap 的边界 562
第八十四章　moving-target determinant 结构 563
第八十五章　RWF-II 作为解析接口 564
第九部　方法能力边界总表 565
第八十六章　方法与信息层级 566
第八十七章　高阶方法何时能进入低阶命题 567
第八十八章　almost-all 与 all-target 568
第八十九章　bounded band 与 fixed fiber 569
第九十章　almost-prime 与 prime-depth 570
第九十一章　高阶平滑与低阶刚性 571
第十部　生成复杂度 572
第九十二章　关系困难如何比较 573
第九十三章　原子层复杂度 574
第九十四章　视界复杂度 575
第九十五章　关系复杂度 576
第九十六章　证书复杂度 577
第十一部　经典关系的统一总表 578
第九十七章　关系位置总表 579
第九十八章　Landau 四题总表 580
第九十九章　一个新关系进入母体的标准步骤 581
第一百章　统一对象层，不统一具体工具 583
经典命题形式证明总表 583
结语　经典问题不再彼此孤立，经典方法也不再彼此冲突 584
第七篇　RenSpectrum：理论的可执行实现与开放关系语言 589
摘要 590
第一部　名称、定位与执行边界 595
第一章　RenSpectrum：名称的完整含义 596
1.1　Ren 596
1.2　Spectrum 596

1.3 Prime-Relation 597
1.4 Workbench 597
第二章 视觉标识也是关系语言的一部分 598
第三章 软件不是证明来源，而是证明语义的执行环境 599
第四章 RenSpectrum 的七个执行层 600
第二部 快速关系读取 601
第五章 快速读取的统一编译式 602
第六章 anchor：关系实例的自由位置 603
第七章 快速读取的输入字段 604
7.1 关系类型 604
7.2 参数 1 / 参数 2 / 参数 3 604
7.3 读取视界 604
7.4 控制深度 z 604
7.5 显示过滤 604
第八章 逐项关系谱 606
第九章 固定和与加权反射 607
第十章 固定差与连续固定差 608
第十一章 仿射关系 609
第十二章 固定偏移模板与阻塞样例 610
第十三章 Green–Tao 固定切片 611
第十四章 窗口关系 612
14.1 Legendre 612
14.2 Oppermann 612
14.3 Brocard 612
第十五章 相邻素数指标 613
第十六章 指数与多项式拉回 614
16.1 Mersenne 614
16.2 $n2 + 1$ 614
16.3 Bunyakovsky 614
16.4 Schinzel H 614
第十七章 完整因子身份关系 615
17.1 Grimm 615
17.2 Erdős–Woods 615
第十八章 三类混合关系示例 616
18.1 交叉镜像关系 616
18.2 二次双原子关系 616
18.3 反射—平移耦合 616

第三部　无限性与全称性模块 618
第十九章　软件首先识别量词类型 619
第二十章　INF_RECURRENCE 620
第二十一章　UNIVERSAL_FIBER 621
第二十二章　WINDOW_UNIVERSAL 622
第二十三章　UNIVERSAL_PREDICATE 623
第二十四章　ARBITRARILY_LONG 624
第二十五章　PARAMETER_INFINITE 625
第二十六章　BLOCK_SEPARATION 626
第四部　接缝、循环与持续性 627
第二十七章　三类接缝的可执行定义 628
27.1　生成接缝 628
27.2　相位接缝 628
27.3　平方接缝族 628
第二十八章　有限循环 $S0$ 与全局持续 $S\infty$ 629
第二十九章　平方接缝闭合扫描 630
第三十章　平方窗口持续读数 631
第五部　局部阻塞与吐出—吸收执行器 632
第三十一章　模板 H 的规范化 633
第三十二章　局部阻塞指纹 634
第三十三章　模板 admissible 状态 635
第三十四章　BH：关系吐出 636
第三十五章　U：吸收资源 637
第三十六章　Q 与 $\mu H(Q)$ 638
第三十七章　两种吸收容量 639
第三十八章　两种净关系势 640
第三十九章　TH 与 DH 641
第四十章　哪些关系自动进入 balance 模块 642
第六部　RSL：开放关系语言 643
第四十一章　RSL 的名称与目的 644
第四十二章　RSL 的母子纪律 645
第四十三章　RSL 的基本结构 646
第四十四章　anchor 字段 647
第四十五章　parameters 字段 648
第四十六章　maps 649
第四十七章　map_generator 650

第四十八章　predicate 651
第四十九章　quantifier 652
第五十章　Twin 的 RSL 表达 653
第五十一章　Goldbach 的 RSL 表达 654
第五十二章　Polignac 的 RSL 表达 655
第五十三章　Green–Tao 固定切片的 RSL 表达 656
第五十四章　混合多项式关系 657
第五十五章　RSL 编译管线 659
55.1　形式证明链的可执行出口 659
55.2　关系名称不是执行语义 660
第五十六章　RSL 的开放原则 661
第七部　计算预算与执行后端 662
第五十七章　为什么必须先做计算预算 663
第五十八章　Web 稠密谱的内存模型 664
第五十九章　四级任务风险 665
第六十章　Web 工程阈值 666
第六十一章　自适应设备内存档位 667
第六十二章　CPU 线程与浏览器能力探测 668
第六十三章　JavaScript 整数边界 669
第六十四章　Mersenne 与 BigInt 670
第六十五章　高坐标不等于大内存 671
第六十六章　segmented sieve 672
第六十七章　Web Worker 673
第六十八章　WebAssembly 674
第六十九章　Wasm 多线程 675
第七十章　WebGPU 的准确位置 676
第七十一章　GPU 不应承担所有任务 677
第七十二章　RenSpectrum Desktop 678
第七十三章　四级执行后端 679
第七十四章　关系类型与推荐后端 681
第七十五章　合理的性能路线 682
第八部　验证等级 683
第七十六章　为什么需要验证等级 684
第七十七章　V0：语法可执行 685
第七十八章　V1：身份读取可复核 686
第七十九章　V2：有限关系读取可复核 687

第八十章　V3：有限终端证书 688
第八十一章　V4：结构批量证书 689
第八十二章　V5：全局量词闭合 690
第八十三章　验证等级的基本纪律 691
83.1　验证等级与形式证明链 691
第九部　机器检查与复现实验 693
第八十四章　确定性优先 694
第八十五章　每次运行的最小记录 695
第八十六章　软件版本与关系版本必须同时保存 696
第八十七章　有限输出的完整性检查 697
第八十八章　阻塞样例是基础回归测试 698
第八十九章　关系恒等式是交叉检查器 699
第九十章　$BH = TH + DH$ 的账本检查 700
第九十一章　BigInt 路径与 Number 路径的交叉区 701
第九十二章　Web 与 Desktop 的语义一致性 702
第十部　完整参数词典 703
第九十三章　身份谱参数 704
$\boldsymbol{I}(n)$ 704
$\alpha(n)$ 704
$P-(n)$ 704
$\Omega(n)$ 704
$\mathrm{PF}(n)$ 704
A 704
$\mathcal{M}$ 704
第九十四章　关系语言参数 705
Θ 705
x / anchor 705
fi 705
$\mathcal{B}$ 705
Q 705
H 705
k 705
d 705
N 705
A, B 705
第九十五章　有限视界与接缝参数 706
z 706
Wz 706

$p < r < s$ 706
$r2$ 706
$s2$ 706
Δ 706
第九十六章　阻塞参数 707
$vH(q)$ 707
$vH(q)$ 707
admissible 707
第九十七章　供给—吸收参数 708
BH 708
$U(r, s)$ 708
Q 708
MQ 708
$JH(c; Q)$ 708
$\mu H(Q)$ 708
$CH\mathrm{exact}$ 708
$CH\mathrm{struct}$ 708
$eH\mathrm{exact}$ 708
$eH\mathrm{struct}$ 708
TH 709
DH 709
第九十八章　量词参数 710
$CR(X)$ 710
$C(\theta)$ 710
$W(n)$ 710
$L(X)$ 710
$P(X)$ 710
$F(X)$ 710
$K*$ 710
第九十九章　软件预算参数 711
max coordinate 711
anchors 711
dense bytes 711
CPU logical threads 711
browser-visible memory tier 711
WebGPU 711
cross-origin isolation 711
DOM row cap 711
task risk 711
第一百章　RSL 字段词典 712

第十一部　复现实验协议 713
第一百零一章　协议目标 714
第一百零二章　协议 A：固定关系读取 715
第一百零三章　协议 B：阻塞证书 716
第一百零四章　协议 C：吐出—吸收证书 717
第一百零五章　协议 D：累计无限接口 718
第一百零六章　协议 E：BigInt 与大整数证书 719
第一百零七章　协议 F：Web / Desktop 交叉复核 720
第一百零八章　协议 G：版本归档 721
第十二部　开放架构 722
第一百零九章　预置关系不是系统边界 723
第一百一十章　从“证明问题”到“编译问题” 724
第一百一十一章　统一的不是符号，而是信息流 725
第一百一十二章　为什么问题会以这种形式出现 726
第一百一十三章　开放不是无限增加按钮 727
第一百一十四章　新的关系也可以反过来检查理论语言 728
第一百一十五章　软件不会替读者思考 729
第一百一十六章　一个开放工作台应当允许失败留下来 730
第一百一十七章　从固定谱到开放知识生成 731
第十三部　全书收束 732
第一百一十八章　从七篇重新看全书 733
第一百一十九章　原子先于问题，关系先于命名 735
第一百二十章　从“怎样证明”到“为什么问题会出现” 736
第一百二十一章　经典方法不再彼此孤立 737
第一百二十二章　统一母体不是知识档案馆 738
第一百二十三章　开放的真正含义：共同入口与方法自由 739
123.1　不同的人可以从不同入口进入 739
123.2　开放工作的数学乐趣 740
第一百二十四章　机器与人的分工 741
第一百二十五章　一个读者怎样继续使用这本书 742
第一百二十六章　从网页到开放实现 743
第一百二十七章　全书最后的参数不再只是参数 745
第一百二十八章　全书最后的结论 747
如何使用本书的参考文献 749
参考文献 750
一　古典基础、素数史与解析数论起点 750

二　Goldbach、加法素数问题与圆法 750
三　筛法、局部阻塞、almost-primes 与分布工具 751
四　小间隔、Twin、prime tuples 与等差结构 751
五　经典素数关系、窗口、多项式与因子身份 751
六　全局谱、素数定理与乘法数论 752
七　有限素性证书、算法与可执行验证 752
八　综合教材、历史与进一步阅读 752
参考文献使用说明 753
后记　统一之后，新的征程开始 754
一　七篇不是七套理论，而是同一个对象的七层展开 754
二　Goldbach 与 Twin：两种最基本全局关系的同时落位 755
三　“一揽子解决”的真正含义：不再为每个猜想重建世界 755
四　证明之后，真正庞大的工作转向后端 756
五　一个时代有一个时代的使命 757
六　从“素数猜想目录”走向“素数关系科学” 758
七　统一以后，远方反而第一次清晰 759
每一个素数都孤独，但没有一个素数真正孤立 761

前言　从素数的孤立谜题到统一关系世界

一　素数：数学最古老的对象之一，也是最年轻的问题之一

在数学的漫长历史中，很少有一种对象像素数这样古老，又这样年轻。

它古老，是因为整除、因子、奇偶以及“不可再分”的整数，几乎与计数本身一样早地进入人类的数学经验。古希腊数学把这种经验提升为严格证明。《几何原本》第九卷命题 20 证明了素数没有最后一个：无论给出多少个素数，都还能推出新的素数存在。[1] 这是一种极其典型的数学奇迹——一个关于无限的事实，被压缩进有限的论证之中。

埃拉托斯特尼筛则展示了另一种持久的思想：不必预先知道全部素数，只需让已有的乘法结构逐层覆盖可约位置，尚未被覆盖的候选便显现出来。两千多年以后，筛法仍然是素数理论的核心语言之一。变化的是技术，未变的是那条古老的脉络：**乘法决定哪些位置能够被解释，剩余位置显露出原子身份。**

它又年轻，是因为直到今天，许多只需初等算术就能说清的问题，仍然足以牵动数论最深的工具：一个偶数能否总被两个素数分解？相差 2 的两个素数会不会无穷出现？两个连续平方之间是否总有素数？给定若干固定偏移，是否会无穷多次同时落在素数上？一个多项式轨道能否持续命中素数？

这些问题表面上形态各异，却都把我们从“一个整数是什么”推向了“若干整数如何同时构成关系”。

素数从来不缺少定义。

真正困难的，往往是**关系**。

只问一个整数是不是素数，答案由这个整数自身的乘法身份决定；一旦问两个、三个乃至更多位置能否以和值、差值、窗口、仿射、等差、多项式或邻接方式同时成立，问题就从身份进入关系。再加上“对每一个”“存在无穷多个”“任意长”“每个窗口都存在”等量词，局部关系立即进入全局结构。

本书正是从这个区分开始。

它所追问的不是“还能不能为某个经典猜想再发明一种技巧”，而是一个更底层的问题：

> **历史上分别命名、分别研究的众多素数问题，**
>
> **是否本来就属于同一个关系母体？**

如果答案是肯定的，那么 Goldbach、Twin、Polignac、Legendre、Oppermann、Brocard、Sophie Germain、prime k-tuple、Green – Tao、多项式取素数值、Mersenne、Grimm、Erdős – Woods 等，就不应首先被看成一长串互不相干的猜想名称。

它们首先应被放回同一张固定算术身份谱、同一个原子关系母体、同一套有限认证结构和同一套量词语言中。

这就是《统一素数关系理论》的出发点。

二　从欧几里得、欧拉到黎曼：素数从“原子”走向“总体结构”

欧几里得告诉我们素数不会终止；埃拉托斯特尼告诉我们可以通过排除乘法占位来寻找素数。到了十八世纪，Euler 则第一次让素数与无限级数、无穷乘积发生深刻联系。Euler 乘积把整数的唯一素因子分解与 ζ-型级数联系起来，使“素数是乘法原子”不再只是离散分类，而进入分析结构。[2][4]

十九世纪，素数理论进一步从“一个个素数”转向“素数整体怎样分布”。Gauss 与 Legendre 对素数计数函数的增长产生了系统猜测；Dirichlet 在 1837 年证明互素剩余类中的等差数列含有无穷多个素数，从而把素数的存在性与 L-函数、特征和同余结构连接起来。[5]

1859 年，Riemann 发表只有数页却深刻改变数论方向的论文 *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*。在这篇论文中，素数分布通过 $\zeta(s)$ 的复零点进入一个全新的谱世界。[6] 1896 年，Hadamard 与 de la Vallée Poussin 独立证明素数定理，确认

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

从而把 Gauss、Legendre 时代的分布直觉提升为定理。[7][8]

这条历史线索非常重要。它说明，素数研究从来不是沿着一条单一技术路线前进：

不可约性 → 筛除 → 级数与乘积 → 同余分布 → 复分析与谱

每一次重大推进，都不是简单抛弃旧对象，而是找到一个更能承载整体结构的表示。

本书延续的正是这种传统，只是把问题再向前推进一步：

> 当素数的单点身份已经确定以后，能否为**素数之间的关系**建立同样统一的底层对象？

三　Goldbach：从素数身份走向固定和值关系

1742 年，Christian Goldbach 与 Leonhard Euler 的通信留下了后来以 Goldbach 名字流传的著名问题。[3] 由于十八世纪对素数是否包含 1 的习惯与今天不同，原始表述与现代形式并不完全相同；现代二元 Goldbach 命题通常写成：

每个大于 2 的偶数都可以表示为两个素数之和。

如果只从公式看，它只是

$$N = p + q.$$

但这个简单公式把素数研究第一次极其鲜明地推进到“关系”层。

对于固定偶数 N，问题并不只是问区间里有多少素数，而是要求存在一对彼此精确对应的位置

$$p, \qquad N-p,$$

且两个位置都具有素数身份。

因此 Goldbach 的困难从来不等价于“素数够不够多”。它要求的是**固定反射关系中的见证**。

两个区间可以拥有相近的素数数量，却不意味着某个指定和值必然产生配对；平均意义上的丰度，也不自动等于每一个目标纤维都非空。正是在这里，“身份”与“关系”第一次显出不能互相替代的层级。

Goldbach 此后成为加法数论的一条主轴。Hardy 与 Littlewood 的圆法和奇异级数把它放入解析框架；Vinogradov 在 1937 年证明每个充分大的奇数可以表示为三个素数之和；陈景润在二元问题上把结论推进到“素数加至多两个素因子的乘积”；Helfgott 最终完成弱 Goldbach，即每个大于 5 的奇数都是三个素数之和。[11][12][13][14]

这些结果不断逼近二元命题，同时也越来越清楚地暴露一个事实：

高阶平均、三元平滑、almost-prime 与二元逐目标全称，不是同一种信息。

Goldbach 需要的是最少冗余的二元关系本身。

四　Twin 与 Polignac：另一条基本轴线是固定差

如果 Goldbach 是固定和值，那么 Twin prime（孪生素数）把数学带到二原子关系的另一条基本轴线上：固定差。

$$\boxed{p, \qquad p+2}$$

是否无穷多次同时为素数？

1849 年，Alphonse de Polignac 提出更一般的固定偶差问题：每个正偶数都应当无穷多次作为相邻素数之差出现。[9] Twin 是最小非平凡偶差 2 的特例。

这一次，外层量词与 Goldbach 完全不同。

Goldbach 要求

$$\forall N \quad \exists (p,q),$$

即**每个目标都要命中**。

Twin 要求

$$\exists^{\infty} p,$$

即**同一个固定关系必须不断返回**。

这两种命题都只涉及两个素数，却代表两种根本不同的全局结构：

$$\boxed{\text{逐参数全称非空}\quad \text{与}\quad \text{固定关系无限回归.}}$$

二十世纪初，Viggo Brun 发展新的筛法，并证明孪生素数倒数和收敛。[17] 这是一项深刻而又意味深长的结果：它严格控制了 Twin 的稀疏程度，却不决定 Twin 是否无穷。到了二十一世纪，Goldston – Pintz – Yıldırım 建立小素数间隔的新框架；2013 年张益唐证明无穷多对相邻素数的间隔小于七千万；Maynard 随后以新的多维筛权方法把有界间隔问题推进到更强的多素数形式。[23][24][25]

这些工作改变了素数间隔研究的尺度，却仍然让一个最简单的固定关系站在最前面：

$$\boxed{q - p = 2.}$$

有界差带与固定差纤维之间，仍然存在不能被一句“已经很接近”替代的结构区别。

图 P-04　Goldbach 与 Twin 的两种量词原型

二者共享同一个二原子关系母体，但全局量词完全不同。

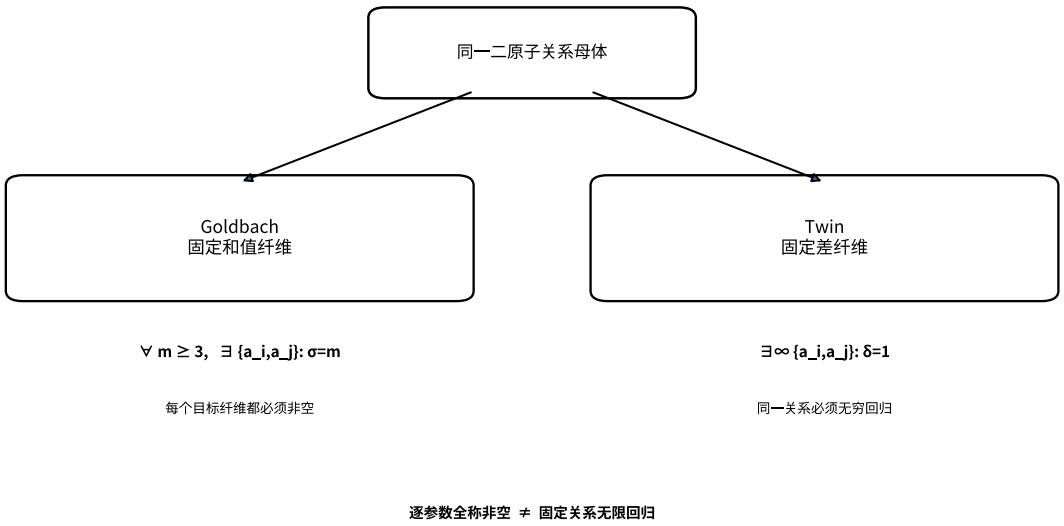


图 P-04　Goldbach 与 Twin 的两种量词原型。 Goldbach 与 Twin 都是二原子关系，但外层量词不同：Goldbach 要求每个固定和值目标纤维非空；Twin 要求同一个固定差关系无穷回归。逐参数全称非空与固定关系无限回归不能互相替代。

五　Landau 四题：二十世纪初对素数难题的一次集中命名

1912 年，Edmund Landau 在剑桥国际数学家大会上列出四个著名素数问题，并称它们在当时的科学状态下“不可攻破”。后来的文献通常把它们称为 Landau 四题：[10]

1. 二元 Goldbach；
2. Twin prime；
3. 每两个连续平方之间是否总有素数；

4. 是否有无穷多个形如 n^2+1 的素数。

这四个问题放在一起，几乎构成一幅天然的“关系分类图”。

Goldbach 是固定和值反射；Twin 是固定差平移；Legendre 型问题是移动窗口占据；n^2+1 是非线性多项式轨道上的素数命中。

传统方法当然可以分别处理它们，但在本书的语言里，它们首先都能够写成同一个基本句式：

$$\boxed{\text{固定身份谱} + \text{位置映射} + \text{局部身份条件} + \text{全局量词}.}$$

这不是说四题“完全一样”。

恰恰相反，统一语言的意义，是让它们真正不同的地方第一次能够被精确比较。

统一，不是抹掉差异。

统一，是让差异出现在同一个坐标系中。

六　二十世纪与二十一世纪：伟大推进不断逼近问题的最低阶核心

二十世纪的素数研究建立了极其强大的工具体系。

Hardy–Littlewood 圆法把固定和写成 Fourier 频率叠加和奇异级数；Vinogradov 用指数和技术完成充分大奇数的三素数表示；Selberg 发展具有广泛适用性的筛法；Bombieri – Vinogradov 定理把算术级数中的素数分布推进到强大的平均模控制；陈景润把 Goldbach 推进到 P_1+P_2；大筛、线性筛、组合筛不断提高对 rough numbers 与 almost-primes 的控制。[11] – [22]

进入二十一世纪，GPY、张益唐、Maynard – Tao 路线把素数间隔推进到有限带；Green 与 Tao 证明素数中存在任意长等差数列；Helfgott 完成三元 Goldbach。[14][23]–[27]

这些成果共同带来一种越来越清楚的认识：

> 数论已经拥有极其强大的“总体控制能力”，而最古老的某些命题却偏偏要求最少冗余、最具体、最刚性的关系见证。

二元 Goldbach 要求每一个固定和值截面真正出现一个 prime–prime 见证；Twin 要求单位固定差这一条纤维本身无界延伸。

因此，历史的推进并没有让“关系”变得不重要；恰恰相反，它不断把真正剩余的困难压缩到关系本身。

这正是本书重新组织问题的入口。

图 P-01　素数关系研究历史时间轴

从素数可判性、筛法与整体分布，逐步进入固定和、固定差、窗口、模板与谱结构。

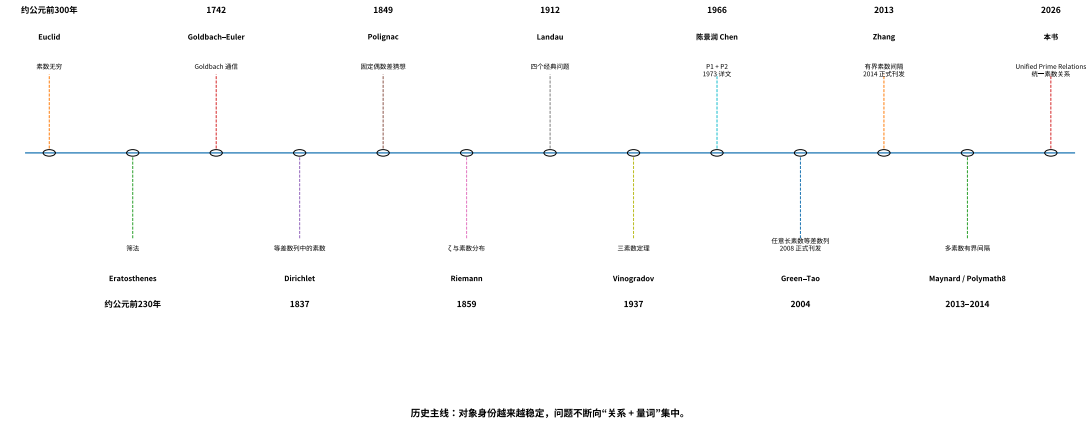


图 P-01　素数关系研究历史时间轴。 从 Euclid 的素数无穷、Eratosthenes 筛、Goldbach–Euler 固定和值、Dirichlet 等差素数、Polignac 固定差、Riemann 谱结构，到 Landau 四题、Vinogradov、Chen、Green–Tao、Zhang、Maynard，历史不断把困难从单点身份推进到关系与量词层。

七　两座孤峰进入同一山脉：本书的核心成果

如果只说本书讨论 Goldbach 与 Twin，会低估这部书。

如果只说本书提出一种“统一框架”，同样会低估它。

前一种说法只看见山峰；后一种说法只看见地图。

本书真正试图完成的是：**让地图解释山峰，让山峰检验地图。**

全书七篇首先建立一个不依赖于 Goldbach 或 Twin 名称的共同对象：固定算术身份谱、乘法不可约原子、持续扩张的原子关系母体、有限移动视界、关系保真筛、关系量词与有限证书。随后，Goldbach 与 Twin 作为这个母体上最基本的两个经典读出进入证明链。

在本书体系中，Goldbach 不再被视为一个孤立的“加法奇迹”。它被定位为同一二原子关系场中的**固定和值全称纤维**：

$$\boxed{\text{Goldbach} = \text{固定和值} + \text{每个目标纤维非空.}}$$

证明沿着

$$\boxed{\text{原子生成} \to \text{关系整行出生} \to \text{固定和值切片} \to \text{移动视界} \to \text{终端清算} \to \text{全称读出}}$$

展开。每个目标进入自己的有限终端世界；关系槽的身份、死亡、补位和最终读数在有限历史中获得确定表达。Goldbach 因而成为本书所称的**终端饱和型关系筛**的代表。

Twin 也不再被视为另一套完全独立的素数世界。它与 Goldbach 使用同一个原子集合、同一个关系出生履历和同一个和—差坐标，只是读取另一条轴：

$$\boxed{\text{Twin} = \text{单位固定差} + \text{无限回归}.}$$

它的证明不依赖一个共同终端，而是在连续平方移动视界中追踪真实双原子关系的生成、消解、永久保存与跨视界累计，把“无限”落实为有限关系证书的无界延伸。Twin 因而成为**持续非灭绝型关系筛**的代表。

于是，两个在历史上被分别命名、分别推进数百年的经典命题，在本书中进入同一个关系平面：

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Goldbach:}\quad & \sigma = \text{固定},\quad \forall\sigma;\\ \text{Twin:}\quad & \delta = 1,\quad \exists^{\infty}.\end{aligned}}$$

它们的不同，不再表现为“需要两套互不相干的底层理论”，而表现为**同一母体上的不同切片与不同量词**。

这也是本书最核心的成果表达：

> **Goldbach 与 Twin 的证明，是统一素数关系理论最醒目的两个结果；**
>
> **而统一关系母体，是这两个结果能够同时被理解的原因。**

而本书并不止步于这两个命题。

第六篇进一步把固定和、固定差、加权反射、prime tuples、等差链、窗口、相邻素数、仿射关系、多项式轨道、稀疏指数轨道、完整素因子集合以及全局谱关系，统一编译为“关系轨道—目标身份—观察区域—全局量词”的形式。由此，一批经典定理与经典命题获得统一的形式证明、等价重构与证书体系；原本分散在不同章节、不同传统中的问题，被放回同一套对象语言中。

因此，这本书的成果不能只概括为“证明两个猜想”。

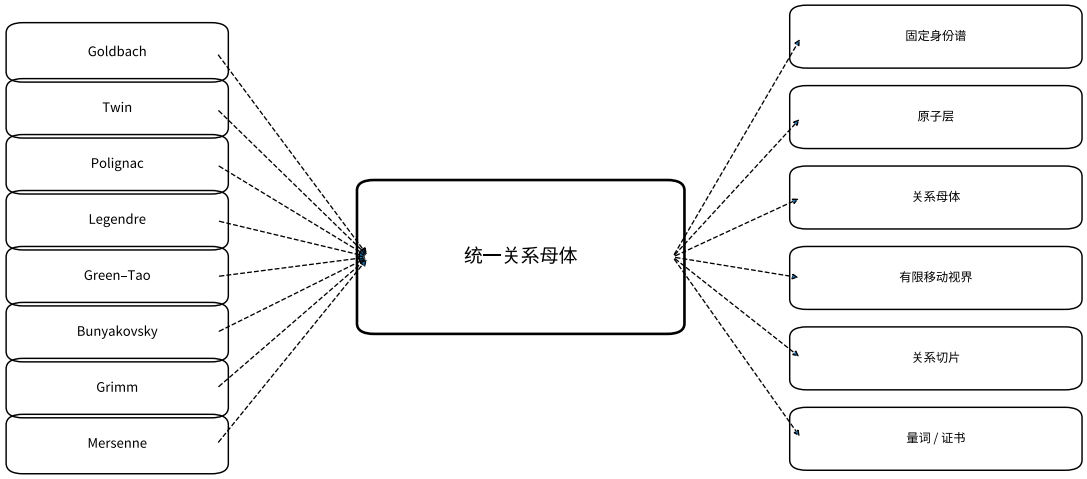
更准确的说法是：

> **本书建立了一套统一素数关系理论，并以 Goldbach、Twin 及一批经典素数命题为其核心证明与读出。**

本书所有新结论，都以正文中的定义、定理链、有限证书与可执行复核为最终依据。理论不要求读者接受一个宣告，而要求任何结论都能够沿着它自己的关系履历重新展开。

图 P-02　从分散猜想到统一关系母体

统一的不是某一种技巧，而是底层对象、关系语言、有限认证与量词接口。



具名问题 = 统一母体上的不同位置映射、局部谓词与外层量词

图 P-02　从分散猜想到统一关系母体。 Goldbach、Twin、Polignac、Legendre、Green–Tao、Bunyakovsky、Grimm、Mersenne 等具名问题被重新放回固定身份谱、原子层、关系母体、有限移动视界、关系切片与量词/证书的共同结构中。统一的是对象层与语言层，而不是强迫所有问题使用同一种工具。

八　真正的转折：从“一个猜想一种语言”回到共同母体

过去几百年，素数研究形成了一种极其自然的组织方式：

先给出素数集合 → 提出一个著名问题 → 寻找适合该问题的工具.

这种方式产生了辉煌成果。

但当问题越来越多、方法越来越深以后，一个新的组织问题随之出现：Goldbach 有 Goldbach 的语言，Twin 有 Twin 的语言，Legendre 有窗口语言，Bunyakovsky 有多项式语言，Green–Tao 有等差结构，Grimm 与 Erdős–Woods 又进入完整因子集合。问题的名字逐渐先于它们共同的底层对象。

本书改变的首先是组织顺序。

它把起点改写为：

> **先有整数的固定算术身份，**
>
> **再有关系对这些身份的读取，**
>
> **最后才有命题对关系施加的量词。**

全书因此形成三层最基本的纪律：

L_0:固定身份，　　L_1:关系读取，　　L_2:整体量词.

也可以压缩成一句话：

母体提供身份；关系选择位置；命题规定量词。

从这里开始，素数问题不必再从自己的历史名称出发。

它们可以先回到共同母体，然后以各自真正的关系结构重新出现。

九　第一篇：固定算术身份谱与原子关系母体

第一篇建立全书的最低层对象。

首先，每个整数都携带固定的算术身份：它是不是素数，它的最小素因子是什么，它的乘法深度 $\Omega(n)$ 是多少，它有哪些不同素因子。于是形成固定算术身份谱

$$\boldsymbol{I}(n).$$

这张谱回答的是最基本的问题：

> 每一个整数是什么？

随后，全书把正奇数写入共享坐标

$$\Phi(a) = 2a + 1,$$

并定义

$$a \star b = a + b + 2ab, \qquad a \boxplus b = a + b + 1.$$

它们分别精确承载奇数乘法与两个奇数的加法：

$$\Phi(a \star b) = \Phi(a)\Phi(b),$$

$$\Phi(a) + \Phi(b) = 2(a \boxplus b).$$

在同一坐标中，奇素数被识别为 $(\mathbb{N}_0,\star)$ 的不可约原子。每个原子发出自己的乘法射线；所有非原子位置被原子射线覆盖；已有射线之后的最小逃逸位置成为下一原子。

更重要的是，一个新原子的出生并不只是增加一个点。

它立即与全部历史原子形成一整层新的二原子关系：

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \sqcup \Lambda_k.$$

因此素数列被提升为一个不断扩张、历史不丢失的关系母体。

再通过和—差无损坐标

$$\Psi(r) = (\sigma, \delta),$$

同一对原子同时拥有和值与差值读数。

Goldbach 与 Twin 的共同底座由此直接显现。

十　第二篇：有限移动视界——无限关系的有限入口

统一母体建立以后，立即出现一个关键问题：母体是无限增长的，一个具体关系如何在有限信息下获得终端认证？

第二篇建立**有限移动视界**。

对任意有限上界 X，窗口内一个奇数是否为素数，只需要检查不超过 $\sqrt{X}$ 的历史原子层。经典平方根判据因此被提升为全书统一的终端认证原则：

$$\boxed{\text{有限窗口} + \text{平方根以内的原子层} \Rightarrow \text{窗口内全部身份终端确定.}}$$

于是候选关系不再无限悬置。

一个候选端点要么在某一有限层被真实乘法因子消解，要么在自己的有限视界中完成认证并晋升为永久关系。已确认关系一旦进入母体，未来原子的出现不会改变它。

这一篇还建立关系保真、真实死亡、first-killer、关系履历、持久嵌入以及从有限视界进入全称与无限量词的统一闭合机制。

有限移动视界不是对无限的粗糙截断。

它是无限关系进入严格数学验收的有限入口。

十一　第三篇：关系切片、导出几何与量词结构

第三篇把二原子母体展开为关系几何。

设

$$m = a + b + 1, \qquad h = b - a.$$

在普通素数坐标中，两个端点可以写为

$$p = m - h, \qquad q = m + h.$$

于是固定和值、固定差、固定较大原子以及固定积分别成为同一关系平面中的不同切片、方向和曲线。

Goldbach 与 Twin 在这里第一次以极其紧凑的方式并列：

$$\boxed{\text{Goldbach 是固定和值切片，Twin 是固定单位差切片。}}$$

第三篇进一步把语言推广到有限模板、仿射关系、等差链、prime constellations、窗口和一般有限阶关系，并严格区分不同的整体量词：无限回归、逐参数全称、窗口全称、任意长度、参数无穷、逐索引全称、身份块分离。

“无限”从此不再是一个模糊的大词。

每一种无限，都必须匹配自己的有限证书。

十二　第四篇：有限控制几何与 Goldbach 的终端饱和结构

第四篇进入关系筛的有限控制层。

局部阻塞、CRT 生存树、首次局部淘汰、真实死亡、关系 first-killer、关系字母表和关系保真筛，被统一到一个有限控制几何中。

在固定和值方向，每一个目标都有自己的自然终端段。关系槽进入终端以后，它的端点身份、死亡责任、补位方式与最终读数由有限历史完整决定。

这一篇把加法关系与乘法占位放回同一自然数母体：乘法没有“另造一个世界”，加法也没有创造素数身份；固定和值只是把已经确定的身份重新配对。

由此形成一系列核心结构：自然终端冻结、终端段分割、关系槽耗尽、逐槽精准补位、整体关系槽守恒、双乘法责任分解，以及 Goldbach 全称关系的终端读出。

Goldbach 因而不再作为一个脱离母体的孤立命题出现，而成为统一关系筛中最典型的**终端饱和型**。

十三　第五篇：无限关系的精准架构与 Twin 的持续非灭绝结构

固定差关系没有一个共同终端。

每一个具体候选对都可以在有限平方视界中被认证，但单位差关系本身可以不断向更高位置移动。因此第五篇研究的是另一种基本型：**持续非灭绝型关系筛**。

相邻素数平方构成天然移动边界；每一平方视界中，关系供给、真实关系、真实死亡和有限吸收资源都可以被逐项记录。由此建立平方视界唯一归属、平方接缝闭合、单层净化、资源半衰、资源寿命、吸收复用度、净关系势和跨视界累计账本。

Twin 在这里成为最小固定模板 $H = \{0,2\}$ 的基本实例。

“无穷多个 Twin”不再被描述成一个无法整体握住的无限对象，而被还原为：

有限视界中的真实关系证书　如何跨视界无界累计。

这样，Goldbach 与 Twin 的差别终于可以在同一体系内部被清晰表达：

Goldbach：终端饱和；　　Twin：持续非灭绝。

十四　第六篇：经典命题的统一编译与方法边界

第六篇把统一母体的承载能力系统展开。

在这里，Goldbach、Lemoine / Lévy、弱 Goldbach、Chen 型关系、Twin、Polignac、Sophie Germain / safe prime、Hardy–Littlewood prime k-tuple、Green–Tao、Dirichlet、PNT 与 PNT in AP、Bertrand、Legendre、Oppermann、Brocard、Andrica、Firoozbakht、n^2+1、Bunyakovsky、

Schinzel H、Mersenne、Fermat、Waring–Goldbach、Grimm、Erdős–Woods，以及 RH / GRH 的谱接口，被逐项送入统一的关系标准形。

核心编译格式是：

关系轨道 + 目标身份深度 + 观察区域 + 整体量词.

这使经典命题之间第一次拥有统一的“类型系统”。

与此同时，埃拉托斯特尼筛、Brun 筛、Selberg 筛、组合筛、线性筛、大筛、Bombieri–Vinogradov、Hardy–Littlewood 圆法、Chen 方法、GPY、Maynard–Tao、Green–Tao、解析 L-函数以及 Pocklington、APR、ECPP 等有限素性证书，也被放到同一张方法能力图中。

全书在这里明确自己的统一边界：

统一对象层，不强迫统一具体工具。

不同方法保存不同层级的信息；统一理论的职责不是让它们变成一种方法，而是让我们知道它们究竟作用于同一个母体的哪一层。

十五　第七篇：RenSpectrum——让理论进入可执行世界

理论若要成为共同研究的基础，就不能只停留在叙述。

第七篇建立 RenSpectrum——统一素数关系工作台。

它不是简单重造一张素数表，而是把固定身份谱、关系标准形、有限视界、量词类型、关系证书、接缝结构、供给—吸收模块和验证等级编译成可执行对象。

Goldbach、Twin、prime tuples、Green–Tao 固定切片、Legendre、Oppermann、Brocard、Mersenne、n^2+1、Bunyakovsky、Schinzel H、Grimm、Erdős–Woods 以及自定义关系，都可以进入同一关系语言。

由此，全书最后形成三层连续结构：

数学理论 → 形式关系语言 → 可执行复核.

一个证明不再只留下最终答案，还可以留下对象、规则、出生、死亡、终端、证书和执行履历。

这也是统一理论走向开放研究平台的第一步。

图 P-03　全书七篇结构总图

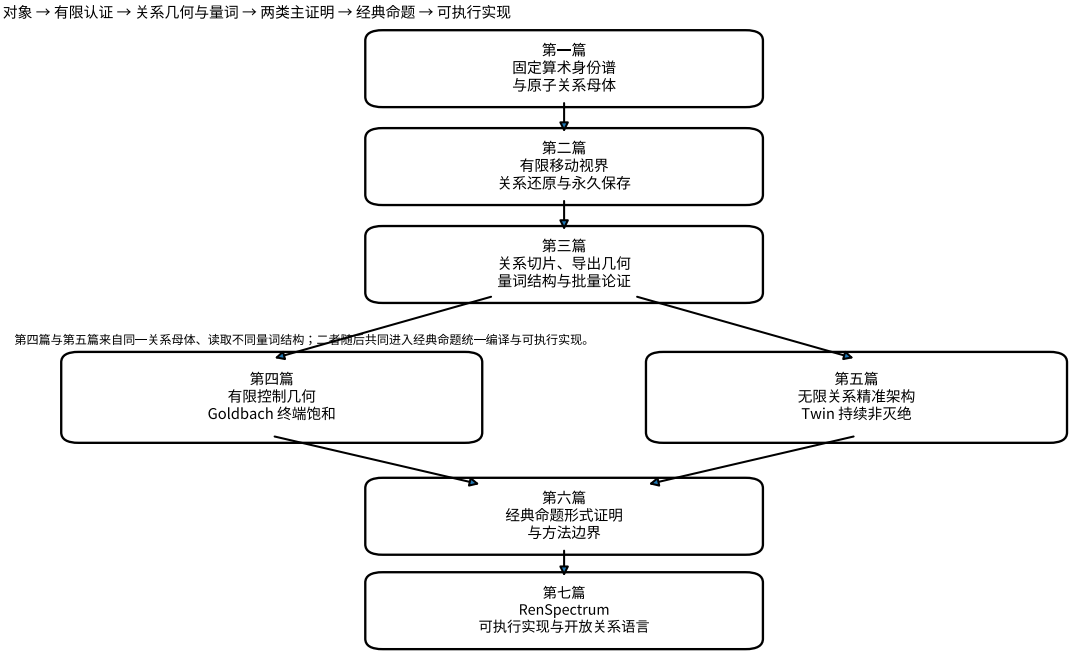


图 P-03　全书七篇结构总图。 七篇不是七套彼此独立的理论，而是同一对象从固定身份、有限认证、关系几何与量词，到两类主证明、经典命题统一编译与 RenSpectrum 可执行实现的连续展开。

十六　从两个经典命题到一门关系理论

本书把 Goldbach 与 Twin 放在书名最显眼的位置，不只是因为它们著名。

它们恰好代表素数关系中两种最基本的全局要求：

$$\forall \quad 与 \quad \exists^{\infty}.$$

Goldbach 要求：每一个目标都不能缺席。

Twin 要求：同一个关系永远不能停止出现。

如果一个理论只能处理其中之一，它仍然可能只是一种局部方法。只有当同一个母体能够同时承载这两种量词，并让它们各自获得匹配的有限证明与全局闭合，统一素数关系理论才真正获得自己的主体。

但这仍然不是终点。

一旦固定身份、关系轨道、移动视界和量词证书被分层，一个新的素数问题进入理论时，就不必重新建造底层世界。它只需要回答：

- 它读取哪些位置；
- 它要求什么身份；
- 它的关系如何保持；

- 它在哪个有限视界被认证；
- 它属于哪一种全局量词；
- 什么样的有限证书与这个量词匹配。

于是“一个猜想”不再是唯一的研究单位。

更底层的研究单位成为：

关系类型及其证书。

这正是本书希望留下的理论转向。

十七　写在阅读之前

阅读这本书时，可以始终记住四句话。

第一句：

固定身份不等于关系事实。

第二句：

关系一旦被压缩，必须证明关键见证没有丢失。

第三句：

有限移动视界不是无限关系的近似，而是无限关系的严格入口。

第四句：

统一底层，不抹平差异；统一对象，不排斥工具。

从 Goldbach 进入，可以沿着固定和值看到原子母体如何进入终端段、关系槽、真实死亡、精准补位与全称读出。

从 Twin 进入，可以沿着单位固定差看到关系怎样跨越连续平方视界，从有限证书进入无限回归。

从解析数论进入，可以直接阅读第六篇的方法边界，看圆法、筛法、大筛、Bombieri－Vinogradov、GPY、Maynard－Tao、Green－Tao 与 L-函数在统一对象层中分别保存什么信息。

从计算进入，则可以由第七篇 RenSpectrum 反向理解前六篇：每一个可执行字段，都对应一个已经在理论中定义清楚的数学对象。

而如果从一个从未被命名的新问题进入，本书希望提供一种不同于过去的起手式：

> 不必先问它像哪一个著名猜想；先问它在固定谱上读取什么关系。

几千年来，人们不断追问素数在哪里。

这本书试图再向前一步：

素数一直在那里；真正需要被重新看见的，是它们如何构成关系。

第一篇　固定算术身份谱与原子关系母体

——从整数身份、共享奇数坐标到关系整行出生与统一切片

本篇主旨

素数关系理论的第一对象，不是某个猜想，也不是某一种筛法，而是整数本身已经确定的算术身份。

在这个固定身份之上，和值、差值、仿射、等差、窗口、多项式、相邻素数、因子集合等关系都只是不同的读取方式。

因而，本书的第一原则是：

母体提供身份；关系选择位置；命题规定量词。

这一原则不会削弱任何经典问题。恰恰相反，它把原本分散的素数问题放回同一张固定谱上，使不同问题拥有共同、可比较、可批量处理的底层语言。

导言　从“许多素数问题”回到“一张固定谱”

素数问题有一种很特别的历史形态。

Goldbach 关注两个素数的固定和值；Twin 关注两个素数的固定差；Polignac 在固定差上再要求中间没有别的素数；Sophie Germain 关注

$$p,\qquad 2p+1;$$

Green–Tao 关注任意长的素数等差数列；Legendre、Oppermann、Brocard 关注素数在不同窗口中的占据；Andrica、Firoozbakht 关注相邻素数之间的数值关系；Bunyakovsky、Schinzel H 关注整数映射或多项式束取素数值的问题；Grimm、Erdős – Woods 则直接读取整数的完整素因子身份。

从表面看，这些问题属于不同章节，甚至属于不同技术传统。

但它们有一个不可绕开的共同事实：

所有关系最终读取的，都是同一批整数已经具有的算术身份。

例如，Goldbach 中的 p 并不会因为进入关系

$$p+(N-p)=N$$

才成为素数。

Twin 中的 $p+2$ 也不会因为它恰好与 p 相差 2 才获得素数身份。

Legendre 的窗口

$$(n^2,(n+1)^2)$$

不会生成窗口里的素数；它只规定读取的位置。

同样，若一个多项式

$$f(n)$$

在某个输入处取到素数值，素数身份属于整数 $f(n)$ 本身，而不是属于“多项式猜想”这个名称。

因此，一个更自然的组织顺序是：

先固定整数身份
↓
再规定读取位置
↓
再组合局部关系
↓
最后施加全称、存在或无限量词.

这构成本书的起点。

另一条同样重要的底层结构，是把正奇数搬到共享坐标

$$\Phi(a) = 2a + 1,$$

在同一坐标中同时表达乘法与二奇数加法，并把奇素数识别为乘法结构中的不可约原子。由此又得到原子射线、最小逃逸、关系整行出生、关系持久继承、和—差无损坐标等一整套生成结构。

这一坐标结构与固定身份谱并行成立。

二者的地位可以准确区分为：

固定整数身份谱　与　原子生成坐标

不是两个竞争的理论。

前者回答：

> 每个整数是什么？

后者回答：

> 在奇数乘法的共享坐标中，这些身份怎样从不可约结构中显现，并怎样自然产生关系母体？

本篇把两者统一在同一基础结构中。

摘要

本篇建立统一素数关系理论的最低层对象：**固定算术身份谱**与其上的**原子关系母体**。

首先定义整数身份映射

$$\mathfrak{I}: \mathbb{Z} \to \mathcal{A},$$

其中

$$\mathfrak{I}(n)=\begin{cases}A, & n\in\mathbb{P},\\ \mathcal{M}_{P^-(n)}, & n>1\text{ 为合数},\\ \partial, & n\le 1.\end{cases}$$

这里 A 表示素数原子身份，$\mathcal{M}_r$ 表示最小素因子为 r 的乘法身份，∂ 表示非正整数及 1 所处的边界域。由同一固定身份还可读取

$$\alpha(n)=\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n),\qquad P^-(n),\qquad \Omega(n),\qquad \mathrm{PF}(n),$$

其中 $\mathrm{PF}(n)$ 为不同素因子的集合。

随后回到正奇数共享坐标

$$\Phi(a)=2a+1,\qquad a\in\mathbb{N}_0,$$

定义

$$a\star b=a+b+2ab,\qquad a\boxplus b=a+b+1.$$

二者分别满足

$$\Phi(a\star b)=\Phi(a)\Phi(b),$$

与

$$\Phi(a)+\Phi(b)=2(a\boxplus b).$$

因此奇素数恰对应 $(\mathbb{N}_0,\star)$ 中的不可约原子。每个原子 a 沿

$$\mathcal{R}_a=\{a+(2a+1)b:b\ge 1\}$$

生成乘法射线；所有非原子位置恰由这些射线覆盖；前 k 个原子射线之后的最小逃逸位置自动成为下一原子。

在关系侧，若

$$A_k=\{a_1,\dots,a_k\},$$

定义完整二原子关系场

$$\Gamma_k=\big\{\{a_i,a_j\}:1\le i\le j\le k\big\}.$$

第 k 个新原子出生时产生整个新关系层

$$\Lambda_k=\{\{a_i,a_k\}:1\le i\le k\},$$

并满足精确不交分解

$$\Gamma_k=\Gamma_{k-1}\sqcup\Lambda_k.$$

由此得到持久系统

$$\Gamma_1\hookrightarrow\Gamma_2\hookrightarrow\cdots,\qquad \Gamma_\infty=\varinjlim_k\Gamma_k.$$

对二原子关系

$$r = \{a_i, a_j\}, \qquad i \le j,$$

定义和—差无损坐标

$$\Psi(r) = (\sigma(r), \delta(r)) = (a_i + a_j + 1,\ a_j - a_i),$$

并有唯一反演

$$a_i = \frac{\sigma - 1 - \delta}{2}, \qquad a_j = \frac{\sigma - 1 + \delta}{2}.$$

最后，本篇把“固定谱—关系切片”原则与原子关系母体统一起来：整数身份属于固定谱；关系只规定读取位置；经典素数问题只是这一固定谱上的不同切片。Goldbach、Twin、Green–Tao、Legendre、Mersenne、Grimm 等不再需要各自拥有一套底层对象。

本篇建立的总结构为

固定身份 → 乘法不可约原子 → 原子递归生成 → 关系整行出生 → 关系持久母体 → 关系切片.

关键词： 固定算术身份谱；素数原子；共享奇数坐标；关系母体；乘法射线；最小逃逸；关系出生；持久继承；和—差坐标；关系切片

第一章　第一对象：固定算术身份谱

1.1　整数线先于任何具体关系

令

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

本书讨论的所有素数关系，最终都落在这条整数线上。

无论问题写成：

$$p + q = N,$$

还是

$$q - p = d,$$

还是

$$p,\ p + d,\ p + 2d, \dots, p + (k-1)d,$$

这些公式首先只是规定了若干整数位置之间的关系。

这些位置一旦确定，它们的素数、合数及因子身份已经由整数乘法结构决定。

因此因此先定义身份，再定义关系。

定义 1.1　固定算术身份谱

设身份字母表为

$$\mathcal{A} = \{\partial, A\} \cup \{\mathcal{M}_r : r \in \mathbb{P}\}.$$

定义

$$\boxed{\Im(n) = \begin{cases} A, & n \in \mathbb{P}, \\ \mathcal{M}_{P^-(n)}, & n > 1 \text{ 为合数}, \\ \partial, & n \le 1. \end{cases}} \tag{1.1}$$

其中 $P^-(n)$ 表示 n 的最小素因子。

称

$$\boxed{(\mathbb{Z}, \Im)}$$

为**固定算术身份谱**。

“固定”二字的意思非常具体：

> 对任意整数 n，$\Im(n)$ 不因后来选择 Goldbach、Twin、窗口、仿射、多项式或任何别的关系而改变。

图 1-01　固定算术身份谱多字段图

同一整数位置携带固定身份；关系只读取这些字段，不生产身份。

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
素数指示 α(n)	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
最小素因子 P-(n)	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3
乘法深度 Ω(n)	1	1	2	1	2	1	3	2	2	1	3	1	2	2
素因子集合 PF(n)	{2}	{3}	{2}	{5}	{2,3}	{7}	{2}	{3}	{2,5}	{11}	{2,3}	{13}	{2,7}	{3,5}

示例只展示 2–15。完整谱由所有整数位置组成；不同关系问题读取同一谱。

图 1-01　固定算术身份谱多字段图。 同一整数位置同时携带素数指示、最小素因子、乘法深度与完整素因子集合等固定字段。后续关系只选择并读取这些身份，不改变身份本身。

1.2　素数指示函数只是身份谱的一个投影

定义

$$\boxed{\alpha(n) = \mathbf{1}_{\{n\in\mathbb{P}\}}.} \tag{1.2}$$

于是

$$\alpha(n) = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{I}(n) = A.$$

因此 α 不是第二张谱，而是 $\mathfrak{I}$ 的二值投影：

$$\mathfrak{I} \to \{0,1\}.$$

当问题只关心“是不是素数”时，α 足够。

当问题还关心合数为什么死亡、由哪个最小素因子负责、完整素因子集合如何匹配时，就需要读取更丰富的身份字段。

定义 1.2　最小素因子字段

对 $n > 1$，定义

$$\boxed{\ell(n) = \begin{cases} n, & n \in \mathbb{P}, \\ P^{-}(n), & n \text{ 为合数}. \end{cases}} \tag{1.3}$$

在实际关系筛中，若 n 是合数，则 $P^{-}(n)$ 给出它唯一的第一责任素数。

定义 1.3　乘法深度

若

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r$$

按重数计素因子，则定义

$$\boxed{\Omega(n) = r.} \tag{1.4}$$

并定义 Liouville 奇偶字符

$$\boxed{\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}.} \tag{1.5}$$

这些字段用于在关系筛中区分不同乘法深度。

定义 1.4　完整素因子集合

定义

$$\boxed{\mathrm{PF}(n) = \{p \in \mathbb{P} : p \mid n\}.} \tag{1.6}$$

这里不计重数。

例如

$$\mathrm{PF}(12) = \{2,3\},$$

$$\mathrm{PF}(18) = \{2,3\},$$

而

$$\Omega(12) = 3, \qquad \Omega(18) = 3.$$

对于 Grimm、Erdős–Woods 一类问题，读取 $\alpha(n)$ 已经不够，必须读取 $\mathrm{PF}(n)$。

1.3　一张谱可以有多个字段

因此，一个整数位置 n 可以被理解为携带一条固定身份记录：

$$\boxed{\boldsymbol{I}(n) = (\Im(n), \alpha(n), P^{-}(n), \Omega(n), \mathrm{PF}(n), \ldots).} \tag{1.7}$$

不同问题只调用其中需要的字段。

这给出本书第一条基础纪律：

> **同一整数只有一份算术身份；不同关系只是读取不同字段。**

(1.8)

第二章　身份与关系：不能交换的两个层级

2.1　关系选择位置，不生产位置

设 X 是某个参数或 anchor 空间。

一个关系首先给出位置映射

$$f: X \to \mathbb{Z}.$$

若有多个位置，则写成

$$f_1, \dots, f_m.$$

例如固定差关系中：

$$f_1(p) = p, \qquad f_2(p) = p + 2.$$

固定和关系中：

$$f_1(p; N) = p, \qquad f_2(p; N) = N - p.$$

关系做的是：

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

然后才读取：

$$\boldsymbol{I}(f_1(x)), \dots, \boldsymbol{I}(f_m(x)).$$

这两步必须分开。

原理 2.1　身份先行原则

对任意位置映射 f，

$$\boxed{\boldsymbol{I}(f(x))}$$

由整数 $f(x)$ 自身决定，而不由映射 f 的名称决定。

因此：

$$\boxed{\text{关系算子选择位置，不生产位置身份。}} \tag{2.1}$$

2.2　三个层级

为统一全书口径，把结构分成三个层级。

L0：固定谱层

$$\boxed{(\mathbb{Z}, \boldsymbol{I}).}$$

这里只回答：

> 某个整数是什么？

L1：**关系读取层**

给定位置映射、有限逻辑、比较、窗口、计数等操作，读取固定谱。

这里只回答：

> 到哪里看，以及怎样组合这些局部读数？

L2：**命题量词层**

在 L1 的局部关系上施加

$$\forall, \quad \exists, \quad \exists^{\infty},$$

或其他等价量词结构。

这里只回答：

> 这种局部关系要求对多少参数成立？

因此：

$$\boxed{L0 \to L1 \to L2.} \tag{2.2}$$

而反方向不能改写底层身份：

$$\boxed{L2 \nrightarrow L0.} \tag{2.3}$$

这就是全书所有“母—子”结构的基本形式。

图 1-02　L0–L1–L2 三层不可交换结构

L0 提供事实对象；L1 组织关系；L2 施加命题量词。后层不能倒写前层。

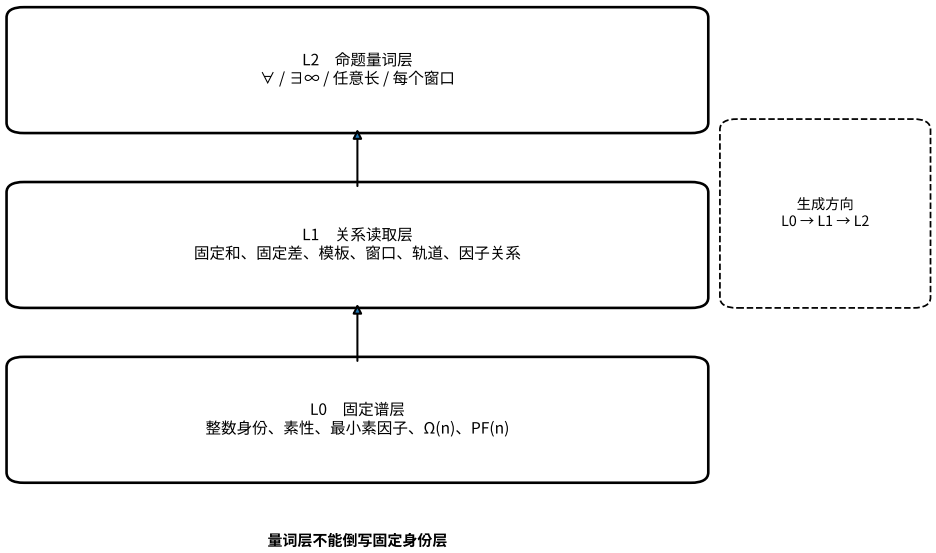


图 1-02　L0–L1–L2 三层不可交换结构。 L0 给出固定身份；L1 在这些身份上组织关系；L2 再施加全称、无限回归、窗口全称等命题量词。生成方向可以逐层上升，但量词层不能倒写固定身份层。

第三章　为什么还需要原子坐标

固定身份谱告诉我们每个整数是什么。

但只停在这里，还没有回答另一个重要问题：

> 素数身份在奇数乘法内部有什么结构意义？

在共享奇数坐标中，这一问题具有一个紧凑的答案。

它把正奇数搬到自然数坐标中，使乘法与两个奇数的加法同时落在同一个载体上。

这一坐标不是第二张身份谱。

它是同一整数世界的另一种精确坐标。

定义 3.1　共享奇数坐标

记

$$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}.$$

定义

$$\boxed{\Phi(a) = 2a + 1.} \tag{3.1}$$

由于 α 始终保留给普通整数的素数身份，定义原子坐标指示函数：

$$\boxed{\hat{\alpha}(a) := \alpha(\Phi(a)) = \mathbf{1}_A(a).} \tag{3.1a}$$

并定义其互补指示：

$$\boxed{\hat{\beta}(a) = 1 - \hat{\alpha}(a).} \tag{3.1b}$$

因此：

$$\hat{\alpha}(a) = 1 \Leftrightarrow a \in A \Leftrightarrow 2a + 1 \in \mathbb{P}.$$

以后 $\alpha(n)$ 只作用于普通整数 n，$\hat{\alpha}(a)$ 只作用于原子坐标 a。

则

$$\Phi\colon \mathbb{N}_0 \to \{1,3,5,\dots\}$$

为双射。

于是整数轴中的奇数位置与原子坐标 a 一一对应。

3.1　整数谱与原子谱只是同一对象的两个视图

定义原子坐标身份

$$\boxed{\mathfrak{I}_A(a) = \mathfrak{I}(\Phi(a)).} \tag{3.2}$$

因此

$$\mathfrak{I}_A = \mathfrak{I} \circ \Phi.$$

这说明：

整数坐标　与　奇数原子坐标

并不是两套独立数据。

它们只是同一固定谱在两个坐标系中的表达。

图 1-03　共享奇数坐标 Φ(a)=2a+1

自然数原子坐标与正奇数整数轴一一对应；这不是第二张谱，而是同一固定谱的另一坐标表达。

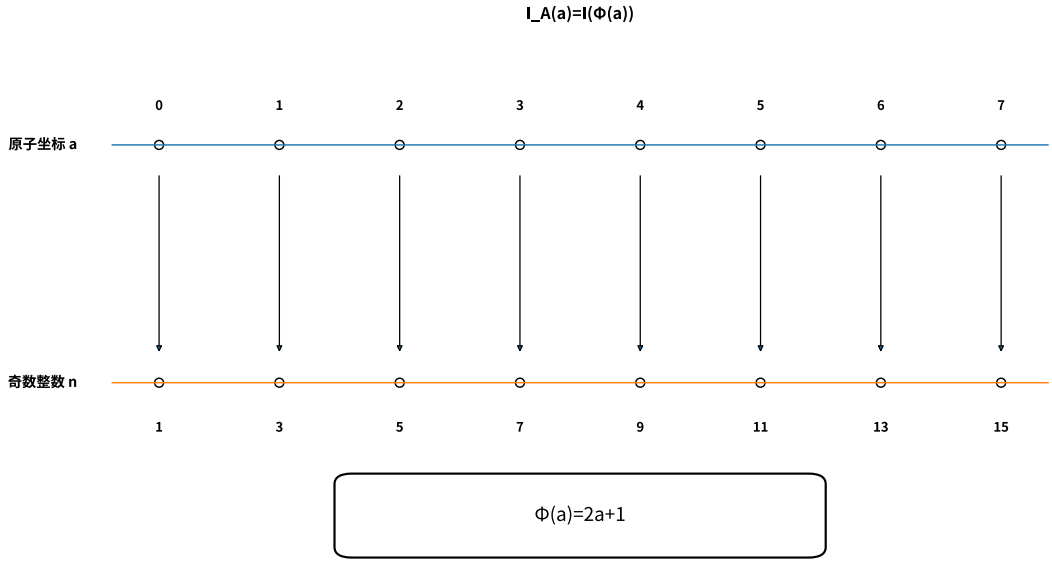


图 1-03　共享奇数坐标 Φ(a)=2a+1。 映射 $\Phi(a)=2a+1$ 把 $\mathbb{N}_0$ 与正奇数一一对应。原子坐标身份 $\Im_A(a)=\Im(\Phi(a))$，因此整数谱与奇数原子谱只是同一固定谱的两个坐标视图。

第四章　共享坐标上的两种基本运算

定义 4.1　乘法坐标运算

对 $a,b\in\mathbb{N}_0$，定义

$$\boxed{a\star b=a+b+2ab.} \tag{4.1}$$

定义 4.2　加法关系运算

定义

$$\boxed{a\boxplus b=a+b+1.} \tag{4.2}$$

这两个运算把正奇数的乘法与两个正奇数的加法关系放进同一个自然数坐标中。

第五章　乘法压缩：奇数乘法的精确搬运

定理 5.1　乘法坐标同构

对任意 $a,b \in \mathbb{N}_0$，

$$\boxed{\Phi(a \star b) = \Phi(a)\Phi(b).} \tag{5.1}$$

证明

由定义，

$$\begin{aligned}\Phi(a \star b) &= 2(a + b + 2ab) + 1 \\ &= 4ab + 2a + 2b + 1 \\ &= (2a + 1)(2b + 1) \\ &= \Phi(a)\Phi(b).\end{aligned}$$

证毕。

推论 5.2　$(\mathbb{N}_0,\star)$ 是交换幺半群

单位元为 0，并且

$$\boxed{(\mathbb{N}_0,\star) \cong (2\mathbb{N}_0 + 1,\times).} \tag{5.2}$$

证明

交换性来自

$$a + b + 2ab = b + a + 2ba.$$

且

$$a \star 0 = a.$$

结合律由 Φ 的双射性与奇数乘法结合律得到：

$$\Phi((a \star b) \star c) = \Phi(a)\Phi(b)\Phi(c) = \Phi(a \star (b \star c)).$$

故

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c).$$

证毕。

这里的 $\star$ 不是近似模型，而是奇数乘法的精确坐标搬运。

第六章　加法展开：二奇数关系的同坐标表达

定理 6.1　奇数加法坐标公式

对任意 $a, b \in \mathbb{N}_0$，

$$\boxed{\Phi(a) + \Phi(b) = 2(a \boxplus b).} \tag{6.1}$$

证明

$$\begin{aligned}\Phi(a) + \Phi(b) &= (2a+1) + (2b+1) \\ &= 2(a+b+1) \\ &= 2(a \boxplus b).\end{aligned}$$

证毕。

所以同一个 a-坐标同时承载：

$$\boxed{\star\text{:奇数乘法,} \qquad \boxplus\text{:二奇数加法关系.}} \tag{6.2}$$

这就是“共享坐标”的真正含义。

图 1-04　共享坐标上的两种基本运算

同一自然数坐标同时精确承载奇数乘法与二奇数加法关系。

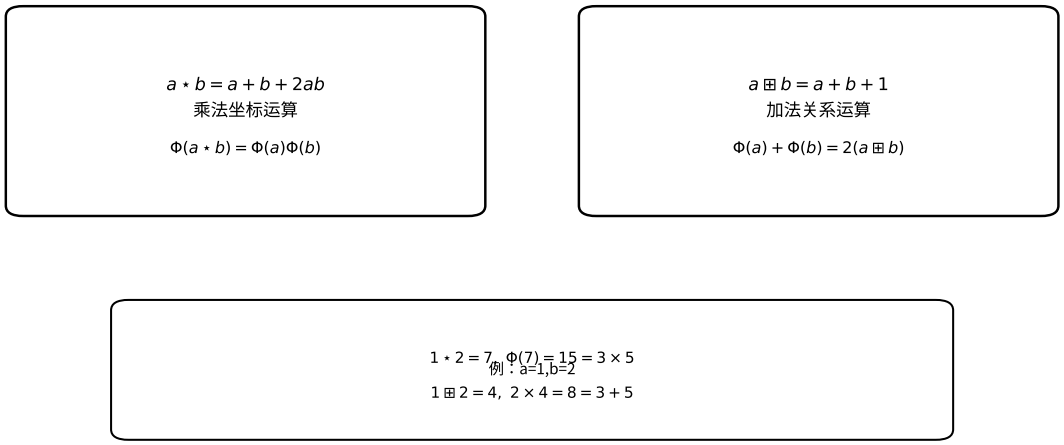


图 1-04　共享坐标上的两种基本运算。 在同一 a-坐标上，$\star$ 精确搬运奇数乘法：$\Phi(a \star b) = \Phi(a)\Phi(b)$；$\boxplus$ 精确表达两个奇数之和：$\Phi(a) + \Phi(b) = 2(a \boxplus b)$。因此乘法生成与加法关系共享同一载体。

第七章　不可约原子：奇素数从乘法内部显现

奇素数不作为额外名单放进 $(\mathbb{N}_0,\star)$，而由不可约性直接恢复。

定义 7.1　$\star$-原子

称 $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 为 $\star$-原子，如果

$$a = x \star y$$

只能发生在

$$x = 0 \quad 或 \quad y = 0.$$

记全体 $\star$-原子组成的集合为

$$\boxed{\mathcal{A}.} \tag{7.1}$$

定理 7.2　原子—奇素数等价

$$\boxed{a \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \Phi(a) = 2a + 1 \text{ 为奇素数.}} \tag{7.2}$$

证明

若 $a \notin \mathcal{A}$，则存在 $x, y \geq 1$ 使

$$a = x \star y.$$

由定理 5.1，

$$2a + 1 = (2x + 1)(2y + 1),$$

两因子均大于 1，故 $2a + 1$ 为合数。

反之，若 $2a + 1$ 为奇合数，则可写成

$$2a + 1 = uv, \qquad u, v > 1$$

且 u, v 为奇数。

令

$$u = 2x + 1, \qquad v = 2y + 1.$$

则 $x, y \geq 1$，且

$$\Phi(a) = \Phi(x)\Phi(y) = \Phi(x \star y).$$

由 Φ 单射，

$$a = x \star y.$$

故 a 非原子。

证毕。

7.1 素数 2 的位置

固定整数谱 $\mathfrak{Z}$ 已经把 2 纳入全部素数原子：

$$\mathfrak{Z}(2) = A.$$

共享奇数坐标 $\Phi(a) = 2a + 1$ 只处理奇数主体，所以 2 不属于其像。

因此本书采用：

> 整数谱负责完整素数身份； 奇数原子坐标负责奇数乘法的生成结构。

(7.3)

两者各司其职，不产生冲突。

图 1-05 ★-原子与奇素数等价
不可约性在共享坐标中精确恢复奇素数身份。

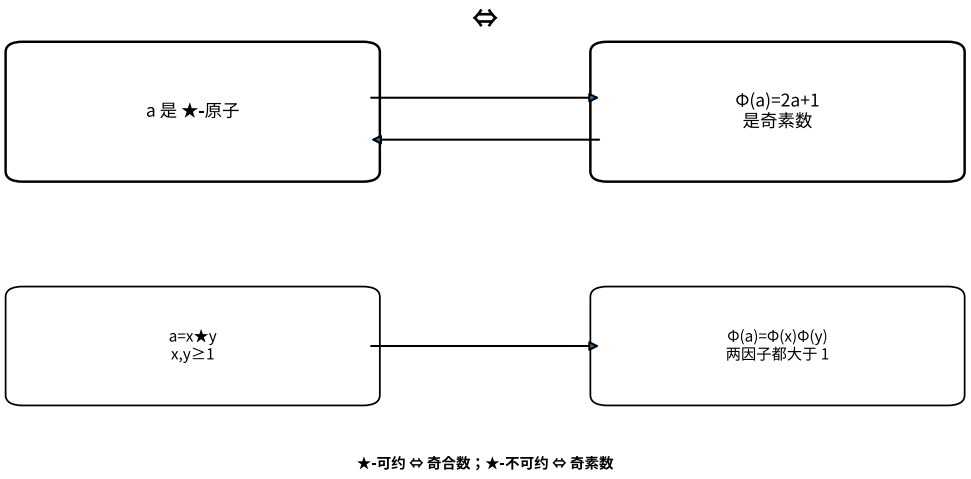


图 1-05 ★-原子与奇素数等价。 由乘法坐标同构，a 可非平凡写成 $x \star y$ 当且仅当 $\Phi(a)$ 可非平凡分解为 $\Phi(x)\Phi(y)$。因此 $\star$-不可约原子与奇素数精确一一对应。

第八章　唯一原子分解与乘法履历

定理 8.1　⋆-唯一原子分解

任意 $n \geq 1$ 都可写成有限个 ⋆-原子的 ⋆-积：

$$\boxed{n = a_1 \star a_2 \star \cdots \star a_r,} \tag{8.1}$$

并且除排列次序外分解唯一。

证明

由算术基本定理，

$$\Phi(n) = p_1 p_2 \cdots p_r,$$

其中 p_i 为奇素数，并按重数计。

令

$$a_i = \frac{p_i - 1}{2}.$$

由定理 7.2，

$$a_i \in \mathcal{A}.$$

再由定理 5.1，

$$\Phi(a_1 \star \cdots \star a_r) = p_1 \cdots p_r = \Phi(n).$$

Φ 为单射，因此

$$n = a_1 \star \cdots \star a_r.$$

唯一性直接来自整数素因子分解的唯一性。

证毕。

8.1　原子分解与身份字段的对应

若

$$\Phi(n) = p_1 \cdots p_r,$$

则

$$\Omega(\Phi(n)) = r.$$

因此原子坐标中的分解长度与整数谱中的乘法深度完全一致。

同样，

$$P^{-}(\Phi(n))$$

对应最小的 $\star$-原子因子。

由此，“乘法履历”与固定谱字段精确对应：

$$\boxed{\text{原子分解} \leftrightarrow \text{整数乘法身份字段.}} \tag{8.2}$$

第九章　原子射线：乘法生成的线性化

固定一个原子 $a \in \mathcal{A}$，令

$$p = \Phi(a) = 2a + 1.$$

则

$$a \star b = a + b + 2ab = a + (2a + 1)b = a + pb.$$

定理 9.1　原子射线定理

每个原子 a 的全部非平凡乘法后继恰好构成算术射线

$$\boxed{\mathcal{R}_a = \{a + pb : b = 1,2,3,\dots\}, \qquad p = 2a + 1.} \tag{9.1}$$

并且

$$\boxed{\Phi(a + pb) = p(2b + 1).} \tag{9.2}$$

证明

由

$$a \star b = a + pb$$

与定理 5.1 直接得到。

证毕。

这给出一个非常直观的图像：

> 一个原子在乘法侧不是孤点。它沿自己的素数步长，在共享坐标中发出一条无穷射线。

第十章　非原子覆盖与下一原子的递归生成

定理 10.1　射线覆盖定理

$$\boxed{\mathbb{N}_{\geq 1} \setminus \mathcal{A} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_a.} \tag{10.1}$$

证明

若

$$n \in \mathcal{R}_a,$$

则

$$n = a \star b$$

对某个 $b \geq 1$，因此 n 非原子。

反之，若 $n \notin \mathcal{A}$，则 $\Phi(n)$ 为奇合数。取其任意奇素因子 p，写成

$$p = 2a + 1, \qquad a \in \mathcal{A}.$$

存在 $b \geq 1$ 使

$$\Phi(n) = p(2b + 1).$$

于是

$$n = a \star b = a + pb \in \mathcal{R}_a.$$

证毕。

10.1　覆盖不是分割

一个合数可能有多个不同素因子，因此一个坐标可能同时落在多条原子射线上。

例如一个对应

$$3 \cdot 5$$

的奇合数位置，既属于 3-原子射线，也属于 5-原子射线。

因此

$$\bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_a$$

是覆盖，而不是不交分区。

这一点与“最小素因子真实死亡”直接相连：需要唯一责任者时，应读取 $P^{-}(n)$，而不是任意整除者。

设原子依次排列为

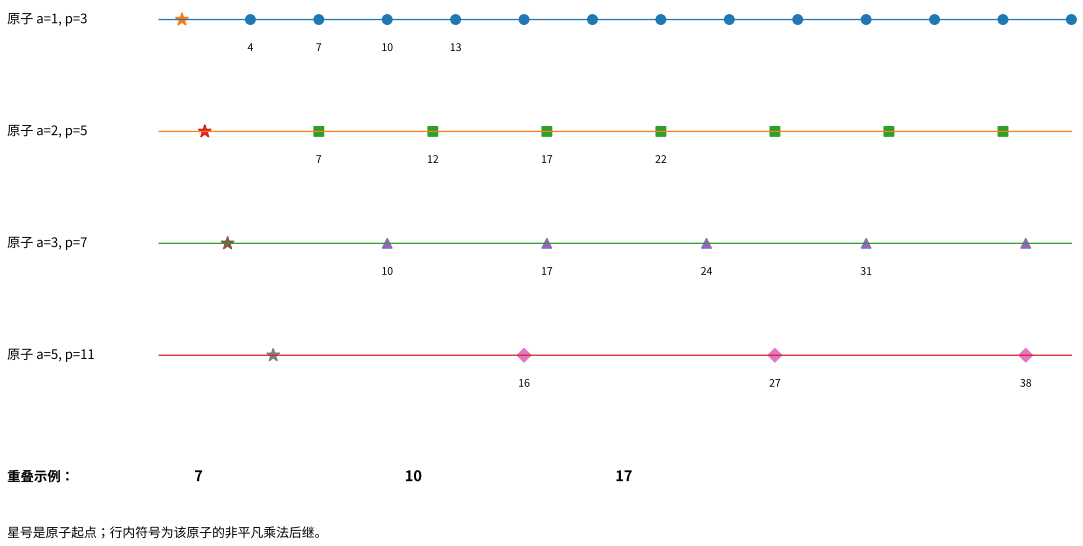
$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots.$$

定义前 k 个原子射线并集

$$\boxed{\mathcal{M}_k = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{a_i}.} \tag{10.2}$$

图 1-06　原子射线与乘法覆盖

$\mathcal{R}_a = \{a + (2a+1)b : b \geq 1\}$；非原子位置由原子射线覆盖，覆盖可以重叠。



星号是原子起点；行内符号为该原子的非平凡乘法后继。

图 1-06　原子射线与乘法覆盖。 每个原子以自己的素数步长发出算术射线；全部非原子位置由这些射线覆盖。不同射线可以在同一位置相交，因此这里是覆盖而不是不交分割。

定理 10.2　最小逃逸点定理

$$\boxed{a_{k+1} = \min\{n > a_k : n \notin \mathcal{M}_k\}.} \tag{10.3}$$

证明

原子 a_{k+1} 不可能属于任何已有原子射线，否则由定理 10.1 它为非原子。

反之，若

$$a_k < n < a_{k+1},$$

则这一区间没有新原子，所以 n 非原子。由定理 10.1，n 属于某条原子射线 $\mathcal{R}_{a_j}$。由于

$$a_j < n < a_{k+1},$$

且 a_{k+1} 是 a_k 后第一个原子，必有

$$a_j \leq a_k.$$

故 $j \leq k$，从而

$$n \in \mathcal{M}_k.$$

证毕。

因此原子可以按以下方式递归生成：

$$\boxed{\text{已有原子} \to \text{发出乘法射线} \to \text{覆盖已有可约位置} \to \text{最小逃逸点成为下一原子.}} \tag{10.4}$$

这就是本书“生成式原子母体”的严格含义。

图 1-07　最小逃逸点生成下一原子

$a_{k+1} = \min\{n > a_k : n \notin \mathcal{M}_k\}$。示例取已有原子 1, 2, 3，下一逃逸点为 5。

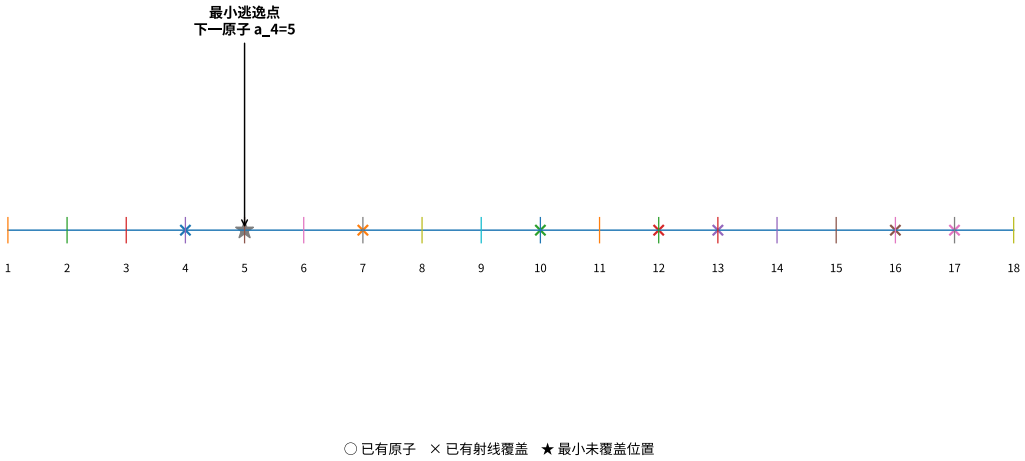


图 1-07　最小逃逸点生成下一原子。 在前 k 个原子射线已经覆盖的坐标之后，大于 a_k 的最小未覆盖位置必为下一原子 a_{k+1}。图中示例由原子 1,2,3 生成下一原子 5。

第十一章　从原子点到关系对象

如果只关心素数本身，到这里已经足够。

但本书讨论的是素数关系。

一个新原子一旦生成，它与全部历史原子之间的二元关系也随即确定。

这里必须特别注意一个信息层级问题。

如果只保存和值集合

$$A_k \boxplus A_k,$$

那么不同的原子对可能投影到同一个和值，从而丢失“哪两个端点形成了这条关系”的信息。

因此真正的母体必须保存**关系实例本身**。

定义 11.1　第 k 层原子集合

记

$$\boxed{A_k = \{a_1, \dots, a_k\}.} \tag{11.1}$$

定义 11.2　第 k 层无序二原子关系场

定义

$$\boxed{\Gamma_k = \{\{a_i, a_j\} : 1 \le i \le j \le k\}.} \tag{11.2}$$

允许 $i = j$，即允许原子自配对。

因此

$$\boxed{|\Gamma_k| = \frac{k(k+1)}{2}.} \tag{11.3}$$

这里的元素是完整关系对象，而不是和值标签。

定义 11.3　和值投影

定义

$$\boxed{\sigma : \Gamma_k \to \mathbb{N}, \qquad \sigma(\{a_i, a_j\}) = a_i + a_j + 1.} \tag{11.4}$$

对应的和值支持集合为

$$\boxed{S_k = \sigma(\Gamma_k).} \tag{11.5}$$

因此：

$$\boxed{\Gamma_k \neq S_k.} \tag{11.6}$$

Γ_k 保存关系实例；

S_k 只保存这些关系在和值轴上的支撑。

第十二章　关系出生律：一个新原子产生一整行

定义 12.1　第 k 个关系出生层

定义

$$\boxed{\Lambda_k = \{\{a_i, a_k\} : 1 \le i \le k\}.} \tag{12.1}$$

于是

$$\boxed{|\Lambda_k| = k.} \tag{12.2}$$

定理 12.2　关系整行出生定理

对每个 $k \ge 2$，

$$\boxed{\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \sqcup \Lambda_k.} \tag{12.3}$$

证明

Γ_k 中任一关系，要么两个端点都属于 A_{k-1}，于是属于 Γ_{k-1}；要么至少一个端点是新原子 a_k。

因为关系是无序对，后一类恰为

$$\Lambda_k.$$

两类不相交，因为 Γ_{k-1} 中不存在端点 a_k。

证毕。

因此

$$\boxed{\Gamma_k = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2 \sqcup \cdots \sqcup \Lambda_k.} \tag{12.4}$$

定义 12.3　关系出生时间

若

$$r = \{a_i, a_j\}, \qquad i \le j,$$

定义

$$\boxed{b(r) = j.} \tag{12.5}$$

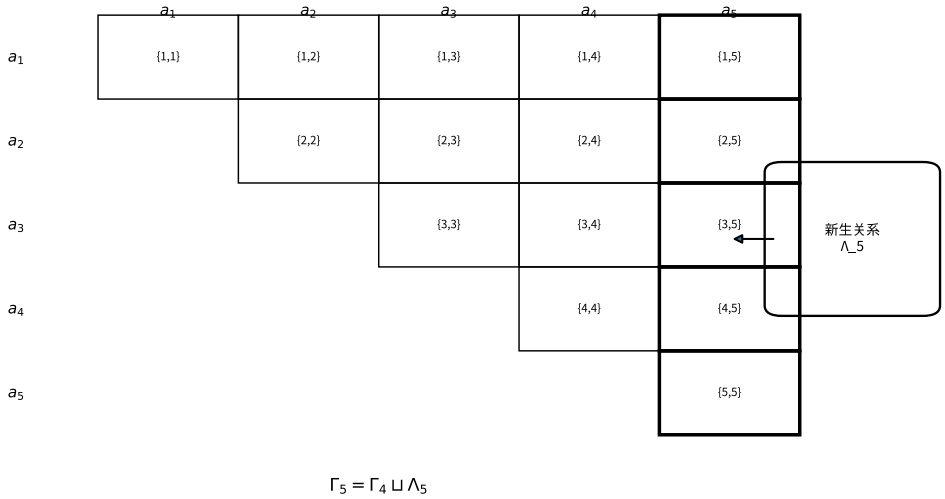
则

$$r \in \Lambda_{b(r)}.$$

每一条关系因此都有唯一出生层。

图 1-08　关系整行出生

新原子 a_5 出生时，与全部历史原子 a_1,⋯,a_4 同时生成新关系；旧关系保持不变。



$$\Gamma_5 = \Gamma_4 \sqcup \Lambda_5$$

粗边最后一列表示 a_5 与全部历史原子的新增关系；其余旧关系原样继承。

图 1-08　关系整行出生。 新原子出生时，并非只多出一个孤立点；它与全部历史原子同时形成一整行新关系 Λ_k，而原有关系 Γ_{k-1} 被完整继承。

第十三章　射线—关系对偶：同一个原子的双重展开

第 k 个新原子 a_k 出生时，发生两类完全不同但由同一原子触发的更新。

乘法侧：

$$a_k \to \mathcal{R}_{a_k}.$$

关系侧：

$$a_k \to \Lambda_k.$$

定理 13.1　射线—关系对偶定理

第 k 个原子的出生具有精确双重更新：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{乘法侧：新增一条无穷乘法射线}\\ \Updownarrow\\ \text{同一个新原子 } a_k\\ \Updownarrow\\ \text{关系侧：新增 } k \text{ 个当前二原子关系实例.}\end{array}} \tag{13.1}$$

因此当原子数由 $k-1$ 增加到 k 时，关系实例数增加

$$k.$$

累计得到

$$\boxed{1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.} \tag{13.2}$$

这就是“乘法压缩—关系展开”的精确结构：

$$\boxed{\text{乘法逃逸一个点，　关系侧获得一整行。}} \tag{13.3}$$

图 1-09　射线—关系对偶
同一个新原子同时触发乘法通道的一条新射线与关系通道的一整层新关系。

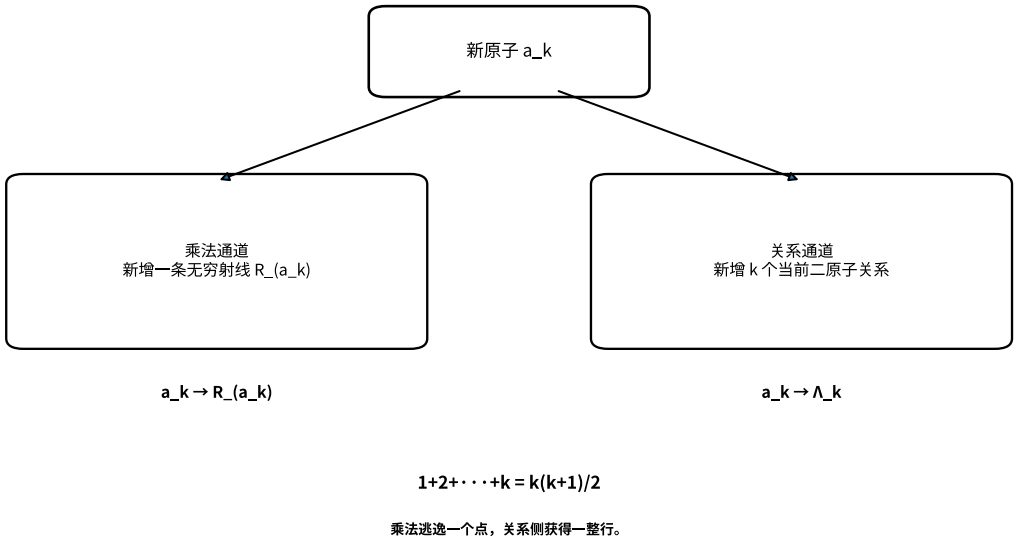


图 1-09　射线—关系对偶。 同一个新原子 a_k 在乘法侧产生一条新的无穷射线 $\mathcal{R}_{a_k}$，在关系侧同时产生包含该原子的整层新关系 Λ_k。因此原子数增加一个，当前二原子关系数增加 k。

第十四章　组合放大与区块接缝

设已有 k 个原子形成旧块 O，随后连续加入 m 个新原子形成新块 B。

令

$$|O| = k, \qquad |B| = m.$$

全部无序二原子关系自然分成：

$$\boxed{\Gamma(O \sqcup B) = \Gamma(O) \sqcup \Gamma(O,B) \sqcup \Gamma(B).} \tag{14.1}$$

其中

$$|\Gamma(O)| = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$|\Gamma(O,B)| = km,$$

$$|\Gamma(B)| = \frac{m(m+1)}{2}.$$

定理 14.1　组合放大律

连续增加 m 个新原子后，新增加的无序二原子关系实例数精确为

$$\boxed{mk + \frac{m(m+1)}{2}.} \tag{14.2}$$

证明

新—旧关系共有 mk 个。

新块内部关系允许自配对，因此共有

$$\binom{m}{2} + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

两类关系在对象层不相交，相加即得。

证毕。

14.1　关系接缝不是一个点

交叉块

$$\Gamma(O,B)$$

说明旧历史与新原子之间的接缝并不是单一边界。

它是一整个

$$k \times m$$

的关系矩形。

这条观察自然导向更丰富的“接缝”概念，包括平方接缝、生成接缝和相位接缝。它们共享同一个基本事实：

> 新的结构进入母体时，不只是增加位置，也会形成一整层跨边界关系。

第十五章　持久嵌入：历史关系为什么不丢失

原子集合满足

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots.$$

关系对象层因此存在自然嵌入。

定义 15.1　层嵌入

对 $s \geq k$，定义

$$\boxed{\iota_{k,s}: \Gamma_k \hookrightarrow \Gamma_s, \qquad \iota_{k,s}(\{a_i, a_j\}) = \{a_i, a_j\}.} \tag{15.1}$$

定理 15.2　低阶关系持久继承定理

对任意 $s \geq k$，$\iota_{k,s}$ 为单射，并且任何已经形成的关系实例在所有更高层中保持相同端点与相同出生身份。

特别地，

$$\boxed{\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma_2 \hookrightarrow \Gamma_3 \hookrightarrow \cdots} \tag{15.2}$$

构成单调持久系统。

证明

由定义，

$$\Gamma_k \subseteq \Gamma_s.$$

映射 $\iota_{k,s}$ 不改变关系对象本身，因此显然为单射。

端点未改变，出生层也未改变。

证毕。

15.1　确认关系与候选关系必须区分

本篇的 Γ_k 保存的是已经确认的原子关系。

关系筛同时引入另一类对象：

候选关系.

候选关系可能在筛过程中被判定为含合数端点并消解。

但一旦一个关系已经进入

$$\Gamma_k,$$

它就是永久历史的一部分。

因此：

候选关系可以死亡；　确认关系只会持久继承。 (15.3)

这一区分是有限关系筛保持逻辑清晰的基础。

图 1-10　持久嵌入 Γ1→Γ2→Γ3→···

已确认的历史关系不会被更高层重采样或删除；层级增长只增加新关系。

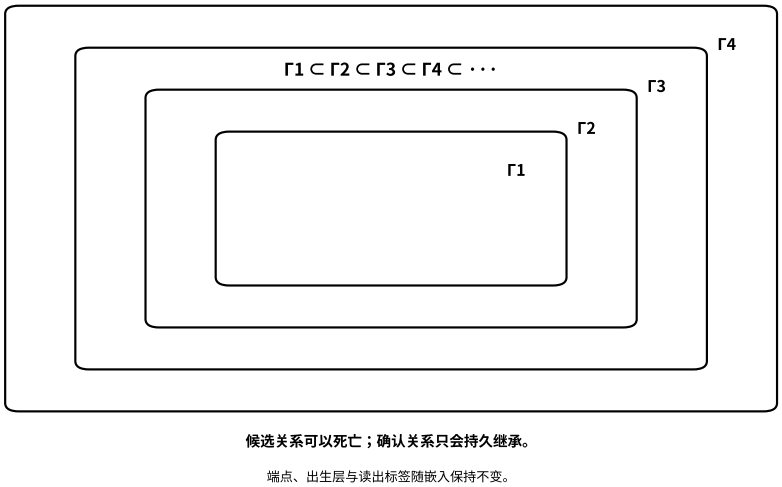


图 1-10　持久嵌入 $\Gamma_1 \to \Gamma_2 \to \Gamma_3 \to \cdots$。 关系骨架构成单调持久系统 $\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma_2 \hookrightarrow \Gamma_3 \hookrightarrow \cdots$。每次扩层只增加新关系；已经确认的关系保持相同端点、出生层与读出标签。

第十六章　关系行平移：历史不是随机重采样

令相邻原子间隔为

$$\boxed{h_k = a_k - a_{k-1}.} \tag{16.1}$$

固定历史原子

$$b \in A_{k-1}.$$

则

$$a_k \boxplus b = a_k + b + 1,$$

而

$$a_{k-1} \boxplus b = a_{k-1} + b + 1.$$

两式相减得

$$\boxed{(a_k \boxplus b) - (a_{k-1} \boxplus b) = h_k.} \tag{16.2}$$

因此：

$$\boxed{a_k \boxplus A_{k-1} = h_k + (a_{k-1} \boxplus A_{k-1}).} \tag{16.3}$$

这说明新关系行的历史部分是上一关系行的整体平移，而不是随机重新生成。

完整新关系层还包含自配对：

$$\{a_k, a_k\}.$$

因此一步关系生成可以概括为：

$$\boxed{\text{旧历史永久保留} + \text{历史关系行整体平移} + \text{新端点加入}.} \tag{16.4}$$

第十七章　无损和—差坐标

和值非常重要，但只保存和值并不保真。

例如不同原子对可能具有相同和值。

因此为每条二原子关系同时保存和值与差值。

设

$$r = \{a_i, a_j\}, \qquad i \le j.$$

定义 17.1　和值标签

定义

$$\boxed{\sigma(r) = a_i + a_j + 1.} \tag{17.1}$$

若

$$p_i = 2a_i + 1, \qquad p_j = 2a_j + 1,$$

则

$$\boxed{p_i + p_j = 2\sigma(r).} \tag{17.2}$$

定义 17.2　差值标签

定义

$$\boxed{\delta(r) = a_j - a_i.} \tag{17.3}$$

于是

$$\boxed{p_j - p_i = 2\delta(r).} \tag{17.4}$$

定义 17.3　和—差关系坐标

定义

$$\boxed{\Psi(r) = (\sigma(r), \delta(r)).} \tag{17.5}$$

定理 17.4　二原子关系无损坐标定理

Ψ 在其像上为单射。

若

$$\Psi(r) = (\sigma, \delta),$$

则两个端点唯一恢复为

$$\boxed{a_i = \frac{\sigma - 1 - \delta}{2}, \qquad a_j = \frac{\sigma - 1 + \delta}{2}.} \tag{17.6}$$

证明

由

$$\sigma = a_i + a_j + 1,$$

与

$$\delta = a_j - a_i,$$

相加、相减即得。

因此同一 (σ, δ) 不可能对应两个不同无序端点对。

证毕。

17.1 可实现格点

一个整数对

$$(\sigma, \delta)$$

能够对应某个整数端点对，至少必须满足

$$\sigma - 1 \geq \delta \geq 0,$$

以及

$$\boxed{\sigma - 1 \equiv \delta \pmod 2.} \tag{17.7}$$

再由

$$a_i = \frac{\sigma - 1 - \delta}{2}, \qquad a_j = \frac{\sigma - 1 + \delta}{2}$$

恢复端点，并检查其是否属于原子集合 $\mathcal{A}$。

17.2 和值与差值不是两套世界

因此：

$$\boxed{\text{固定和值} \quad \text{与} \quad \text{固定差值}}$$

不是两套独立的底层关系。

它们只是同一个二原子关系场的两个坐标纤维。

这是把 Goldbach 与 Twin 放回同一母体的最直接原因。

图 1-11　和—差无损坐标

关系对与 σ–δ 坐标之间是双向可逆的；和值与差值不是两套对象。

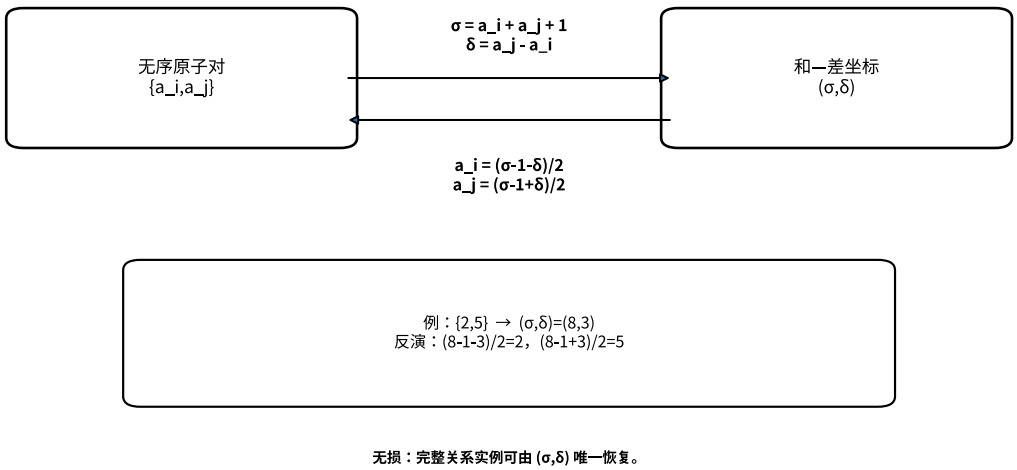


图 1-11　和—差无损坐标。 关系对 $\{a_i, a_j\}$ 与 (σ, δ) 之间双向可逆：$\sigma = a_i + a_j + 1$、$\delta = a_j - a_i$，并可由反演公式唯一恢复两个端点。因此和值与差值是同一关系对象的两种无损读数。

第十八章　从“关系实例”到“关系切片”

统一切片语言可以直接作用于关系母体。

关系母体给出全部既有关系对象。

切片只选择其中满足某个条件的部分。

定义 18.1　关系读出

设

$$\theta: \Gamma_\infty \to Y$$

为任意关系标签或关系坐标。

对

$$y \in Y,$$

定义纤维

$$\boxed{\Gamma^{(\theta=y)} = \theta^{-1}(y).} \tag{18.1}$$

这个操作不会创造新的关系实例，只是从母体中选择已有关系。

原理 18.2　母—子读出继承

若

$$r \in \Gamma^{(\theta=y)},$$

则 r 的端点、出生层与身份全部继承自 Γ_∞。

因此：

$$\boxed{\text{读出不制造事实；　　子关系继承母关系。}} \tag{18.2}$$

定义 18.3　固定和值切片

对 $m \in \mathbb{N}$，定义

$$\boxed{\Gamma^{(m)} = \{r \in \Gamma_\infty : \sigma(r) = m\}.} \tag{18.3}$$

定义 18.4　固定差值切片

对 $h \in \mathbb{N}_0$，定义

$$\boxed{\Gamma^{[h]} = \{r \in \Gamma_\infty : \delta(r) = h\}.} \tag{18.4}$$

于是：

- Goldbach 型固定和问题读取 $\Gamma^{(m)}$；
- Twin 型固定差问题读取 $\Gamma^{[1]}$；
- 一般固定差读取 $\Gamma^{[h]}$。

这只是关系切片语言的最早两个例子。

第十九章　从二原子切片推广到一般位置映射

固定和值与固定差都能在 Γ_∞ 内直接表达。

但现代素数关系远不止二原子和值与差值。

例如：

$$p \mapsto 2p+1,$$

$$n \mapsto n^2+1,$$

$$a \mapsto (a, a+d, \dots, a+(k-1)d),$$

以及窗口

$$(n^2, (n+1)^2).$$

为了统一这些关系，需要把“切片”从 Γ_∞ 上的坐标纤维推广为固定整数谱上的一般读取。

定义 19.1　位置映射族

设参数为 Θ，anchor 空间为 X_Θ。

给定有限个整数值映射

$$\boxed{f_i : X_\Theta \times \Theta \to \mathbb{Z}, \qquad 1 \le i \le m.} \tag{19.1}$$

称

$$(f_1, \dots, f_m)$$

为一个**位置映射族**。

定义 19.2　局部关系谓词

给定固定谱字段后，定义有限逻辑函数

$$\mathcal{B}$$

作用于这些位置读数。

最基本的素数束谓词为

$$\boxed{R_\Theta(x) = \prod_{i=1}^{m} \alpha\left(f_i(x;\Theta)\right).} \tag{19.2}$$

当且仅当所有位置都是素数时，

$$R_\Theta(x) = 1.$$

19.1　固定和是位置映射

给定偶数 N，

$$f_1(p;N)=p,\qquad f_2(p;N)=N-p.$$

于是

$$\boxed{R_N(p)=\alpha(p)\alpha(N-p).} \tag{19.3}$$

19.2 固定差是位置映射

给定 d，

$$f_1(p)=p,\qquad f_2(p)=p+d.$$

于是

$$\boxed{R_d(p)=\alpha(p)\alpha(p+d).} \tag{19.4}$$

19.3 有限模板是位置映射束

给定

$$H=\{h_1,\dots,h_k\},$$

定义

$$f_j(n)=n+h_j.$$

于是

$$\boxed{R_H(n)=\prod_{j=1}^{k}\alpha\,(n+h_j).} \tag{19.5}$$

19.4 等差束是参数化模板

给定 k,d，

$$H_{k,d}=\{0,d,2d,\dots,(k-1)d\}.$$

于是

$$\boxed{R_{k,d}(a)=\prod_{j=0}^{k-1}\alpha\,(a+jd).} \tag{19.6}$$

19.5 仿射关系

给定 A,B，

$$f_1(p)=p,\qquad f_2(p)=Ap+B.$$

于是

$$\boxed{R_{A,B}(p)=\alpha(p)\alpha(Ap+B).} \tag{19.7}$$

Sophie Germain 对应

$$A = 2, \qquad B = 1.$$

19.6 多项式拉回

给定整数值多项式

$$f(n),$$

定义

$$\boxed{R_f(n) = \alpha(f(n)).} \tag{19.8}$$

多个多项式同时读取时：

$$\boxed{R_{\boldsymbol{f}}(n) = \prod_{j=1}^{k} \alpha\left(f_j(n)\right).} \tag{19.9}$$

第二十章　窗口、相邻素数与完整因子身份也是切片

切片不要求所有问题都写成“若干固定位置同时为素数”。

只要读取对象仍来自同一固定谱，就属于同一底层语言。

20.1　窗口占据

给定有限整数窗口

$$I_\theta \subset \mathbb{Z},$$

定义

$$\boxed{W(\theta) = \sum_{n \in I_\theta} \alpha\,(n).} \tag{20.1}$$

那么：

$$W(\theta) > 0$$

表示窗口中至少有一个素数。

例如 Legendre 窗口

$$I_n = (n^2, (n+1)^2) \cap \mathbb{Z}.$$

20.2　窗口空读

定义

$$\boxed{E(I) = \prod_{n \in I} (1 - \alpha(n)).} \tag{20.2}$$

则

$$E(I) = 1$$

当且仅当 I 中没有素数。

Polignac 的“两个端点是素数且中间没有素数”正是：

$$\alpha(p)\alpha(p+d) \cdot \prod_{p<n<p+d} (1 - \alpha(n)).$$

20.3　相邻素数索引

若

$$p_n$$

表示第 n 个素数，则相邻素数关系读取的是：

$$(p_n, p_{n+1}).$$

例如 Andrica 的局部谓词为

$$\boxed{\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1.} \tag{20.3}$$

Firoozbakht 可写成稳定的对数比较：

$$\boxed{\frac{\log p_{n+1}}{n+1} < \frac{\log p_n}{n}.} \tag{20.4}$$

这里读取的仍是固定素数序列，只是关系谓词从 Boolean prime test 升级为实数比较。

20.4 完整因子集合切片

Grimm 型关系读取

$$\mathrm{PF}(n+i),$$

并要求给连续合数块中的每个位置选取互不相同的素因子。

Erdős–Woods 型关系则比较

$$\mathrm{PF}(x+i)$$

与

$$\mathrm{PF}(y+i)$$

是否逐位相同。

这表明统一关系理论的母体并不局限于

$$\alpha(n) \in \{0,1\}.$$

更完整的身份字段同样属于固定谱。

第二十一章　统一关系规范形

把前面的结构压缩，可以得到全书最重要的关系表达式之一。

定义 21.1　固定谱关系规范形

一个有限局部关系写成

$$\boxed{R_\Theta(x) = \mathcal{B}(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \dots, \boldsymbol{I}(f_m(x;\Theta))),} \tag{21.1}$$

其中：

- Θ 为参数；
- x 为 anchor；
- f_i 为位置映射；
- $\boldsymbol{I}$ 为固定身份字段；
- $\mathcal{B}$ 为有限关系谓词。

若只读取素数身份，则可简写为

$$\boxed{R_\Theta(x) = \mathcal{B}(\alpha(f_1(x;\Theta)), \dots, \alpha(f_m(x;\Theta))).} \tag{21.2}$$

21.1　命题只在最外层增加量词

具体数学命题再写成

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\Theta,x}[R_\Theta(x)].} \tag{21.3}$$

因此经典问题的差别被分解成三个层面：

$$\boxed{\text{位置映射} + \text{局部谓词} + \text{外层量词}.} \tag{21.4}$$

这就是“切片”的完整数学含义。

图 1-12　统一关系规范形
经典命题只在“位置映射 + 固定身份字段 + 局部谓词 + 外层量词”几个位置发生变化。

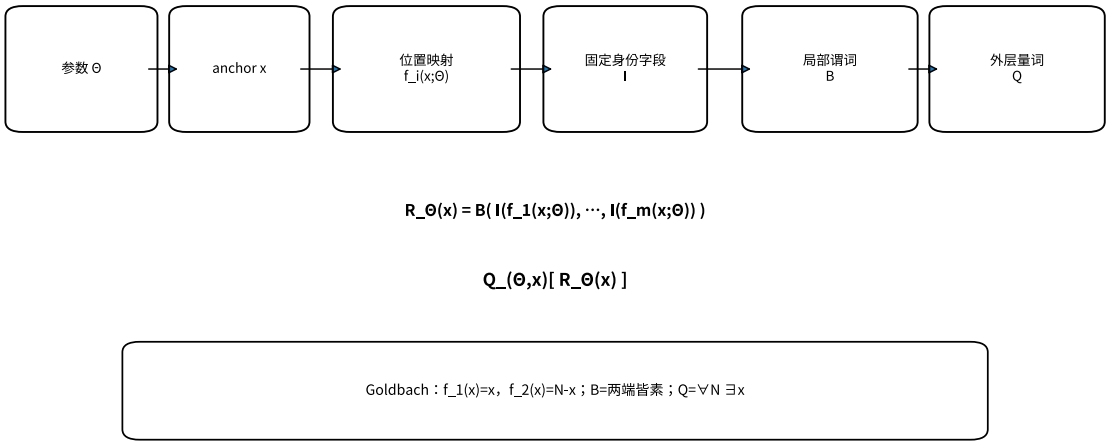


图 1-12　统一关系规范形。 有限局部关系统一写成 $R_\Theta(x) = \mathcal{B}(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \dots, \boldsymbol{I}(f_m(x;\Theta)))$，具体命题只在最外层增加量词 $Q_{\Theta,x}[R_\Theta(x)]$。这把位置映射、身份读取、局部谓词与全局量词明确分层。

第二十二章　关系保真：为什么不能过早压成一个数字

在统一表达下，另一个问题随即出现：

> 一个关系能否只保存“剩多少个”而不保存“剩的是哪些”？

答案一般是否定的。

例如固定和问题中，真正的对象不是一个候选数量，而是一组具体反射槽

$$(x, N-x).$$

两个不同目标即使在某一筛层拥有相同候选数，也可能因为剩余位置的余类配置不同，在下一层产生不同更新。

因此：

$$\boxed{\text{数量相同} \not\Rightarrow \text{关系状态相同.}} \tag{22.1}$$

这给出关系筛必须遵守的底层原则：

$$\boxed{\text{先保存关系对象，再决定可以压缩哪些统计量。}} \tag{22.2}$$

22.1　关系状态的最低信息

一个关系槽若要在筛过程中保持可追踪性，至少应能够记录：

$$\boxed{\text{位置} + \text{端点} + \text{端点身份} + \text{必要时的 first-killer} + \text{出生与死亡履历.}} \tag{22.3}$$

关系保真筛正是这一原则的系统化形式。

本篇只固定它的逻辑基础：

> 关系是对象，不是一个数字的附属解释。

第二十三章　高阶关系的自然入口

二原子关系不是母体的上限。

对任意 $r \geq 2$，可以定义第 k 层无序 r-原子关系族

$$\boxed{\Gamma_k^{(r)} = \{\{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\} : 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r \leq k\}.} \tag{23.1}$$

是否允许重复端点，可按具体关系定义决定。

一个新原子 a_k 出生时，所有包含 a_k 的新高阶关系也同时生成。

因此二元的“整行出生”推广为：

$$\boxed{\text{一个新原子产生一个完整的新关系星层。}} \tag{23.2}$$

这为：

- 三元 Goldbach；
- prime k-tuple；
- Green–Tao 等差链；
- 一般有限镜像束；

提供统一的对象入口。

第二十四章　有限层母体的正式定义

原子生成结构与固定谱结构可以合并为一个统一对象。

定义 24.1　第 k 层生成式关系母体

定义

$$\boxed{\mathfrak{M}_k = \left(\boldsymbol{I}, A_k, \mathcal{M}_k, \Gamma_k, \{\Lambda_j\}_{j\le k}, \Phi, \star, \boxplus, \Psi\right).} \tag{24.1}$$

其中：

1. $\boldsymbol{I}$ 为固定整数身份谱；
2. $A_k = \{a_1, \dots, a_k\}$ 为已生成奇素数原子；
3. $\mathcal{M}_k = \bigcup_{i\le k} \mathcal{R}_{a_i}$ 为已有原子乘法占位场；
4. Γ_k 为完整二原子关系骨架；
5. Λ_j 为第 j 层关系出生层；
6. Φ 为奇数坐标映射；
7. $\star$ 为乘法坐标运算；
8. $\boxplus$ 为二奇数加法关系运算；
9. $\Psi = (\sigma, \delta)$ 为二原子无损和—差坐标。

定义 24.2　无限关系母体

利用自然嵌入

$$\mathfrak{M}_k \hookrightarrow \mathfrak{M}_{k+1},$$

定义

$$\boxed{\mathfrak{M}_\infty = \varinjlim_{k\to\infty} \mathfrak{M}_k.} \tag{24.2}$$

在二原子关系骨架上：

$$\boxed{\Gamma_\infty = \bigcup_{k\ge 1} \Gamma_k.} \tag{24.3}$$

“直极限”比简单并集更准确，因为它同时记录各层之间的历史兼容嵌入。

第二十五章　母体动力学的零阶闭合

由上述定义与定理得到一个完整的有限递推回路：

$$
\begin{array}{ccc}
 & A_k & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
\text{乘法通道} & & \text{关系通道} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{M}_k & & \Gamma_k \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{寻找最小逃逸点} & & \text{保留全部历史关系} \\
\downarrow & & \downarrow \\
a_{k+1} & & \Gamma_k \\
 & \searrow \quad \swarrow & \\
 & \Gamma_{k+1} = \Gamma_k \sqcup \Lambda_{k+1} &
\end{array}
\tag{25.1}
$$

压缩为一句话：

$$
\boxed{\text{乘法占位} \to \text{不可约释放} \to \text{新原子} \to \text{关系整行出生} \to \text{历史永久累积.}} \tag{25.2}
$$

这里还没有使用任何具体经典猜想。

因此具体猜想只作为

$$\mathfrak{M}_\infty$$

上的读出，而不会反过来定义母体。

第二十六章　一个完整的小例子

前四个奇素数为

$$3,5,7,11.$$

对应原子

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_3 = 3, \qquad a_4 = 5.$$

于是

$$A_4 = \{1,2,3,5\}.$$

26.1　固定整数身份谱

普通整数轴上：

$$\mathfrak{I}(3) = A,$$

$$\mathfrak{I}(5) = A,$$

$$\mathfrak{I}(7) = A,$$

$$\mathfrak{I}(9) = \mathcal{M}_3,$$

$$\mathfrak{I}(11) = A,$$

$$\mathfrak{I}(15) = \mathcal{M}_3.$$

这些身份不因随后选择和值还是差值而改变。

26.2　原子射线

原子 1 对应素数 3，其射线为

$$\mathcal{R}_1 = \{4,7,10,13,\dots\},$$

因为

$$1 + 3b.$$

映回奇数轴：

$$\Phi(4) = 9, \qquad \Phi(7) = 15, \qquad \Phi(10) = 21.$$

它们均被素数 3 整除。

原子 2 对应素数 5，其射线为

$$\mathcal{R}_2 = \{7,12,17,22,\dots\}.$$

原子 3 对应素数 7，其射线为

$$\mathcal{R}_3 = \{10,17,24,31,\dots\}.$$

坐标 4 被已有射线占据，对应奇合数 9。

坐标 5 不被前三个原子射线占据，因此成为下一原子，对应素数 11。

26.3 关系出生层

$$\Lambda_1 = \{\{1,1\}\},$$

$$\Lambda_2 = \{\{1,2\},\{2,2\}\},$$

$$\Lambda_3 = \{\{1,3\},\{2,3\},\{3,3\}\},$$

$$\Lambda_4 = \{\{1,5\},\{2,5\},\{3,5\},\{5,5\}\}.$$

因此

$$|\Gamma_4| = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

26.4 和值碰撞为何不能压掉关系

有

$$1 \boxplus 3 = 5,$$

以及

$$2 \boxplus 2 = 5.$$

所以两个不同关系：

$$\{1,3\}, \qquad \{2,2\}$$

在和值轴上都投影到 5。

但它们的无损坐标不同：

$$\Psi(\{1,3\}) = (5,2),$$

$$\Psi(\{2,2\}) = (5,0).$$

因此：

$$\boxed{\text{和值相同} \Rightarrow / \text{关系相同.}} \tag{26.1}$$

这就是为什么母体必须保存关系实例，而不能只保存和值支撑。

图 1-13　完整小例子：从整数谱到关系碰撞

前四个奇素数 3,5,7,11 对应原子 1,2,3,5；同一小例子贯穿身份、射线、关系出生与和值碰撞。

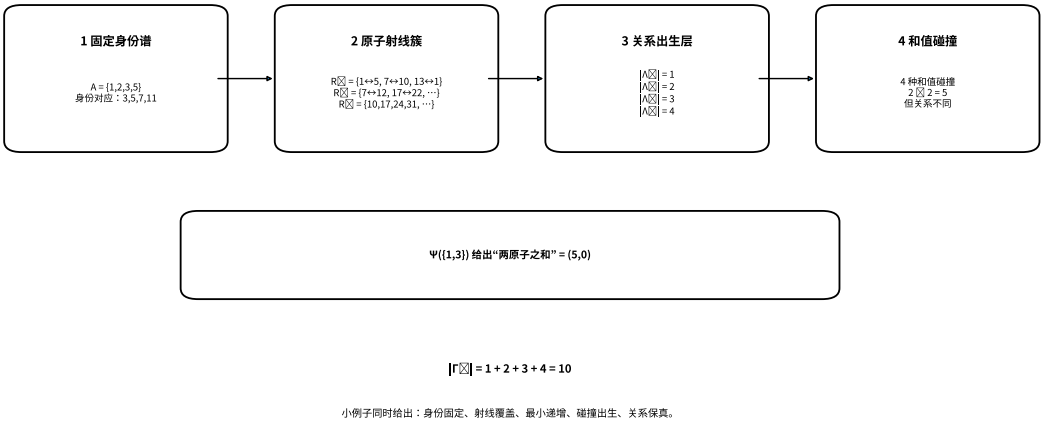


图 1-13　完整小例子：从整数谱到关系碰撞。 前四个奇素数 3,5,7,11 对应原子 1,2,3,5。同一小例子同时展示固定整数身份、原子射线、关系出生层以及和值碰撞；{1,3} 与 {2,2} 具有相同和值却有不同无损坐标，说明关系实例不能压缩成和值计数。

第二十七章　第一篇基础定理总表

为便于全书统一引用，本篇结果压缩为以下基础定理。

基础定理 A　固定身份

每个整数位置 n 具有固定算术身份

$$\boldsymbol{I}(n),$$

与后来选择的关系无关。

基础定理 B　乘法压缩

$$\boxed{\Phi(a \star b) = \Phi(a)\Phi(b).}$$

基础定理 C　原子等价

$$\boxed{a \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \Phi(a) \text{ 为奇素数.}}$$

基础定理 D　原子递归生成

$$\boxed{a_{k+1} = \min\{n > a_k : n \notin \mathcal{M}_k\}.}$$

基础定理 E　关系整行出生

$$\boxed{\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \sqcup \Lambda_k, \qquad |\Lambda_k| = k.}$$

基础定理 F　持久继承

$$\boxed{\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma_2 \hookrightarrow \cdots.}$$

基础定理 G　关系行平移

$$\boxed{a_k \boxplus A_{k-1} = h_k + (a_{k-1} \boxplus A_{k-1}).}$$

基础定理 H　和—差无损坐标

$$\boxed{\Psi(r) = (\sigma(r), \delta(r))}$$

唯一确定二原子关系端点。

基础定理 I　关系切片原则

任何经典关系首先只规定位置映射和局部谓词：

$$\boxed{R_\Theta(x) = \mathcal{B}(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \ldots, \boldsymbol{I}(f_m(x;\Theta))).}$$

关系不改变固定身份谱。

图 1-14　第一篇基础定理结构依赖图

实线表示正文结构上的主要前后依赖；本图是阅读依赖图，不声称给出最小公理独立性。

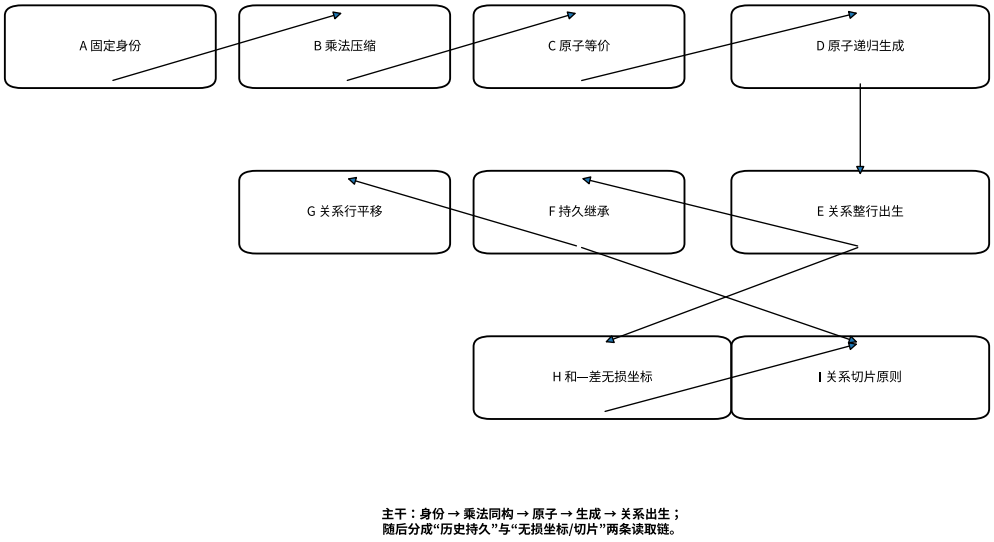


图 1-14　第一篇基础定理结构依赖图。 第一篇基础定理 A–I 形成从固定身份、乘法压缩、原子等价与递归生成，到关系整行出生、持久继承、关系行平移、和—差无损坐标与关系切片的结构链。本图表示正文阅读与结构依赖，不主张最小公理独立性。

第二十八章　从关系切片到量词结构

本篇回答了四件事情：

1. 整数身份在哪里；
2. 奇素数为何是乘法不可约原子；
3. 新原子怎样递归产生；
4. 原子之间的关系怎样形成持久母体并被不同方式切片。

但经典素数问题往往包含更强的外层要求。

例如：

$$\forall N\ \exists p,$$

或

$$\exists^{\infty} p,$$

或

$$\forall k\ \exists a, d,$$

或

$$\forall n\ \exists p \in I_n.$$

这些不再只是“关系是什么”，而是：

关系在整个参数族上怎样持续成立。

在这一基础上，全书随后逐层展开：

有限视界 → 关系履历 → 量词类型 → 局部阻塞 → 接缝与周期 → 关系保真筛 → 批量论证 → 全称与 (28.1)

特别是：

有限验证本身不是无限量词；有限结构只有通过明确的闭合机制，才能进入全称或无限结论。

(28.2)

这构成全书中段的核心。

第二十九章　关系母体的阅读方式

整套结构可以理解成一张不断展开、但底层身份始终不动的图。

整数线上，每个位置已经有自己的算术身份。

奇数坐标把乘法不可约性显现成原子。

原子出生时，立即与全部历史原子形成关系。

这些关系永久保存。

这些关系可以用不同方式读取：

- 沿和值轴读取；
- 沿差值轴读取；
- 沿仿射线读取；
- 沿有限模板读取；
- 沿等差束读取；
- 沿窗口读取；
- 沿多项式轨道读取；
- 沿相邻素数索引读取；
- 沿完整因子集合读取。

因此，统一素数关系理论的第一幅总图是：

$$
\boxed{\begin{array}{c}
\text{整数固定身份谱 } \boldsymbol{I} \\
\Downarrow \\
\text{奇数乘法原子坐标 } (\mathbb{N}_0,\star) \\
\Downarrow \\
\text{不可约原子 } \mathcal{A} \\
\Downarrow \\
\text{原子射线与最小逃逸} \\
\Downarrow \\
\text{关系出生层 } \Lambda_k \\
\Downarrow \\
\text{持久关系母体 } \Gamma_\infty \\
\Downarrow \\
\text{位置映射 } f_i \\
\Downarrow \\
\text{关系切片 } R_\Theta \\
\Downarrow \\
\text{外层量词.}
\end{array}} \tag{29.1}
$$

第一篇建立到“关系切片”为止。

量词的严格分类，以及有限结构如何批量推出全称或无限，构成量词理论的核心内容。

结语　从一列素数到一张可读取的关系谱

传统表述常把素数写成一列：

$$2,3,5,7,11,13,\ldots$$

然后开始提问题。

统一素数关系理论采用另一种组织顺序。

它先承认：

整数身份已经固定。

再把奇数乘法搬到共享坐标，看到：

奇素数是乘法不可约原子。

然后看到：

> 一个新原子不是只增加一个点， 而是同时增加一整层关系。

这些关系进入历史后永久保存：

$$\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma_2 \hookrightarrow \cdots.$$

固定和值与固定差不再是两套底层结构：

$$\Psi(r) = (\sigma(r), \delta(r))$$

已经说明它们是同一关系对象的不同坐标。

更一般地，仿射、窗口、等差、多项式、相邻素数、完整因子集合也不需要重新建立新的母体。

它们只需要给出：

到哪里读

以及：

怎样组合这些读数.

于是第一篇最终建立的，不再只是“原子母体”，而是一张更完整的固定关系谱：

> **一张固定身份谱， 允许无数关系切片； 切片可以不同， 底层身份始终不动。**

这也是全书各章共同使用的第一原则：

母体只提供身份；　　关系只选择读取；　　命题只规定量词。

第二篇讨论有限视界与关系履历。

其中要回答：

> 一个无限母体中的具体有限关系，什么时候可以获得完整、零误差、不可逆的终端身份？

进一步的问题是：

> 不同的全称与无限量词，怎样从有限结构中批量闭合？

在这一框架下，Goldbach、Twin、Green–Tao、Legendre、Mersenne、Grimm 以及更一般的自定义关系，都可作为同一固定谱上的不同切片，进入同一套严格的数学语言。

第二篇　有限移动视界、关系还原与永久保存

——持久继承、终端认证、关系履历与通向无限的有限入口

本篇主旨

固定算术身份谱给出了整数的事实身份，却不会自动给出关系。

一个固定和值是否被占据、一个固定差是否反复出现、一个窗口是否非空、一个模板是否同时命中，取决于这些固定身份能否按照指定关系被正确地重新组织起来。

因而：

固定谱是事实底座；关系还原是命题成立的结构条件。

又因为全局关系通常包含全称或无限量词，任何严格论证都必须回答第二个问题：

一个无限增长的素数关系母体，为什么能够通过有限信息被严格验收？

核心答案是：

有限移动视界不是对无限关系的近似截断，而是无限关系进入严格数学验收的有限入口。

摘要

第一篇建立了固定算术身份谱

$$\boldsymbol{I}(n)$$

以及共享奇数坐标中的原子生成结构。奇素数对应 $\star$-不可约原子；第 k 个新原子 a_k 一旦出生，立即与全部历史原子形成新的关系层

$$\Lambda_k,$$

从而得到持久嵌入

$$\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma_2 \hookrightarrow \cdots.$$

这些结果给出了统一关系母体，但固定身份本身并不等于具体关系已经得到解决。关系必须保留位置、配对、窗口、次序或其他结构信息；若把关系过早压成一个总数、密度或有限模直方图，固定谱也无法替代已经丢失的配对信息。

本篇首先建立**关系还原原则**。一个关系状态若允许从其记录中重新得到关系端点及其固定身份，则称其为关系保真状态。对固定和值、固定差、有限模板等低阶关系，关系对象必须先于标量统计保存。固定和值中的显式例子表明：两个目标可以具有相同的初始槽数，并在第一筛层具有相同剩余数，却在下一筛层产生不同更新；因此“剩余数量”不是关系状态的充分描述。

随后建立统一的**有限移动视界**。对任意有限上界 X，定义

$$\mathcal{V}(X) = \{a \geq 1 : \Phi(a) \leq X\}.$$

对其中任一位置，其原子身份只需要已经生成的、不超过 $\sqrt{X}$ 的原子层即可完全判定。因为任何不超过 X 的奇合数都具有一个不超过 $\sqrt{X}$ 的素因子。于是得到零误差终端认证：

$$\boxed{\text{有限窗口} + \text{平方根以内的原子层} \Rightarrow \text{窗口内全部原子身份终端确定.}}$$

相邻素数平方

$$[p_k^2, p_{k+1}^2)$$

给出这一移动视界的自然离散边界：整个区间中的复合身份都由不超过 p_k 的历史原子完全决定。

本篇严格区分两类对象：

1. **候选关系壳**：端点尚未全部完成原子认证，可以在后续乘法层中被消解；
2. **永久关系骨架**：端点已经确认是原子，一旦进入关系母体便永久保存。

对每个奇合数，以最小素因子定义唯一真实死亡层；对有限关系，以第一个使任一端点确认为合数的最小素因子定义唯一关系死亡层。因此每个有限候选关系要么在某个有限层真实消解，要么在有限移动视界中完成认证并晋升为永久关系。不存在永远悬而未决的有限关系。

这使母体动力学具有清楚的结构：

$$\boxed{\text{候选出生} \to \begin{cases} \text{真实消解,} \\ \text{终端认证并晋升} \end{cases} \to \text{永久持久.}}$$

在此基础上，本篇定义关系履历，记录支撑端点、出生层、真实死亡层、终端视界、读出标签和最终状态，并证明所有已确认关系在视界扩张中保持不变。

最后，本篇把有限终端结构与全称、无限量词连接起来。若一类关系的有限冻结层满足持久嵌入，则：

$$\boxed{\text{全局关系无限} \Leftrightarrow \text{不存在最后一个产生新冻结关系的移动视界.}}$$

对不同量词，有限入口具有不同的精确形式。无限回归转化为累计计数无界；逐参数全称转化为每个关系纤维非空；窗口全称转化为每个窗口占据；任意长度关系转化为已实现最大长度无界。

因此，固定谱并没有削弱关系问题。恰恰相反，只有把关系对象、有限终端与量词结构逐层还原，固定谱才具有统一承载不同素数问题的能力。

关键词： 关系还原；有限移动视界；关系保真；永久关系；终端认证；真实死亡；关系履历；平方视界；持久嵌入；全称量词；无限关系

第一章　固定身份为什么不能代替关系

整数的算术身份是固定的。

例如，若

$$29 \in \mathbb{P},$$

那么无论讨论 Goldbach、Twin、等差数列还是多项式关系，

$$\alpha(29) = 1$$

都不会改变。

但一个关系命题并不只问“某个位置是什么”，还问：

> 哪些位置必须同时出现，它们以什么方式对应，它们是否落在同一个关系纤维中。

例如固定偶数 N 的二元和值关系要求：

$$\boxed{\exists p, \quad \alpha(p)\alpha(N-p) = 1.} \tag{1.1}$$

其中关键并不是单独知道哪些整数是素数，而是必须保留反射映射

$$\boxed{p \mapsto N - p.} \tag{1.2}$$

如果只保存：

$$\pi(N),$$

或某个区间内的素数数量，甚至保存所有素数模若干小素数的直方图，这些信息一般都不能恢复指定的反射配对。

因此：

$$\boxed{\text{固定身份} \neq \text{关系事实.}} \tag{1.3}$$

更准确地说：

$$\boxed{\text{固定身份} + \text{正确关系还原} = \text{具体关系事实.}} \tag{1.4}$$

这也是全书中“切片”一词的严格含义。

切片并不是随意观察固定谱。

它必须携带足够的信息，使原关系能够从切片记录中被重新识别。

图 2-01　固定身份不等于关系事实

同一批素数身份不变；改变关系读取规则，得到的是不同关系对象。

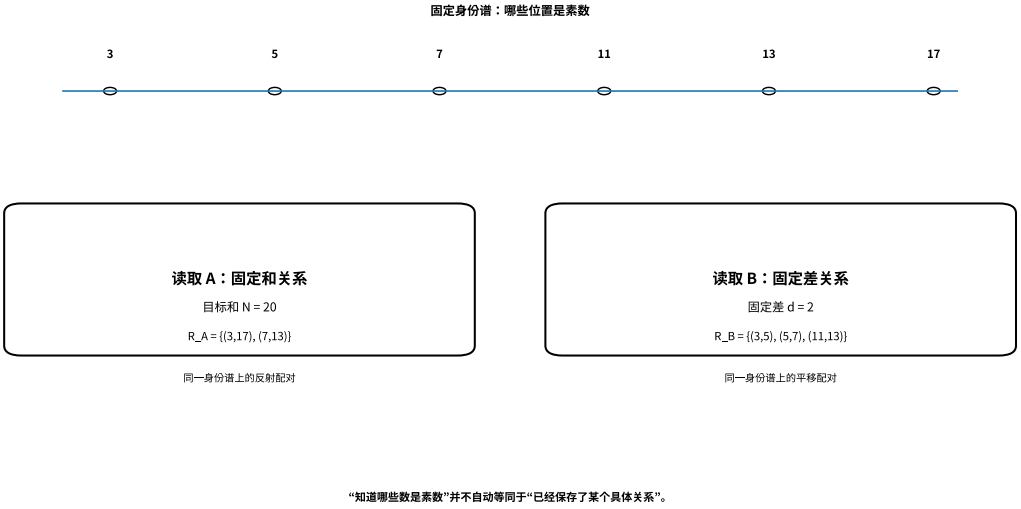


图 2-01　固定身份不等于关系事实。 固定谱只回答哪些位置具有素数身份；具体关系还必须指定端点怎样配对。同一批素数可以按固定和值形成反射配对，也可以按固定差形成平移配对。因此身份事实不能代替关系对象。

第二章　关系还原：什么叫真正保存一个关系

定义 2.1　关系实例

设

$$\Theta$$

为参数，

$$x$$

为 anchor，

$$f_1, \dots, f_m$$

为位置映射。

定义关系实例

$$\boxed{r_{\Theta,x} = (f_1(x;\Theta), \dots, f_m(x;\Theta)).} \tag{2.1}$$

其固定身份读数为

$$\boxed{\boldsymbol{I}(r_{\Theta,x}) = (\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \dots, \boldsymbol{I}(f_m(x;\Theta))).} \tag{2.2}$$

定义 2.2　关系描述子

设

$$D(r)$$

为对关系实例 r 的某种记录。

如果存在确定的恢复映射

$$\mathcal{R}$$

使得

$$\boxed{\mathcal{R}(D(r)) = r,} \tag{2.3}$$

则称 D 为**无损关系描述子**。

定义 2.3　目标充分描述子

给定局部关系谓词

$$\mathcal{B}(r) \in \{0,1\},$$

若存在函数 F 使

$$\boxed{\mathcal{B}(r) = F(D(r))} \tag{2.4}$$

对所有关系实例成立，则称 D 对该谓词是**目标充分的**。

无损描述子一定目标充分；目标充分描述子不一定无损。

这一层区别十分重要。

有些问题只需要判定局部真假，可以使用较小的充分状态；有些问题还要追踪出生、死亡、端点配对或后续更新，就必须保存更丰富的关系对象。

2.1 和—差坐标是无损的

第一篇定义

$$\Psi(r) = (\sigma(r), \delta(r)).$$

并证明

$$a_i = \frac{\sigma - 1 - \delta}{2}, \qquad a_j = \frac{\sigma - 1 + \delta}{2}.$$

因此 Ψ 是无损关系描述子。

2.2 单独和值不是无损的

若只保存

$$\sigma(r),$$

不同关系可能投影到同一和值。

例如：

$$1 \boxplus 3 = 2 \boxplus 2 = 5.$$

所以和值支撑不能还原原关系。

2.3 关系研究的价值恰在这里

固定谱解决的是：

$$\text{位置身份}.$$

关系理论解决的是：

$$\text{位置怎样被组织成对象}.$$

因此：

关系不是固定谱的附属说明； 关系是把固定事实组织成命题的结构本身。

(2.5)

统一能力来自关系层被研究得足够深入，而不是来自“谱已经固定”这一事实本身。

图 2-02　无损描述子与目标充分描述子

无损描述子可恢复完整关系；目标充分描述子只需保留当前命题判定所需要的信息。

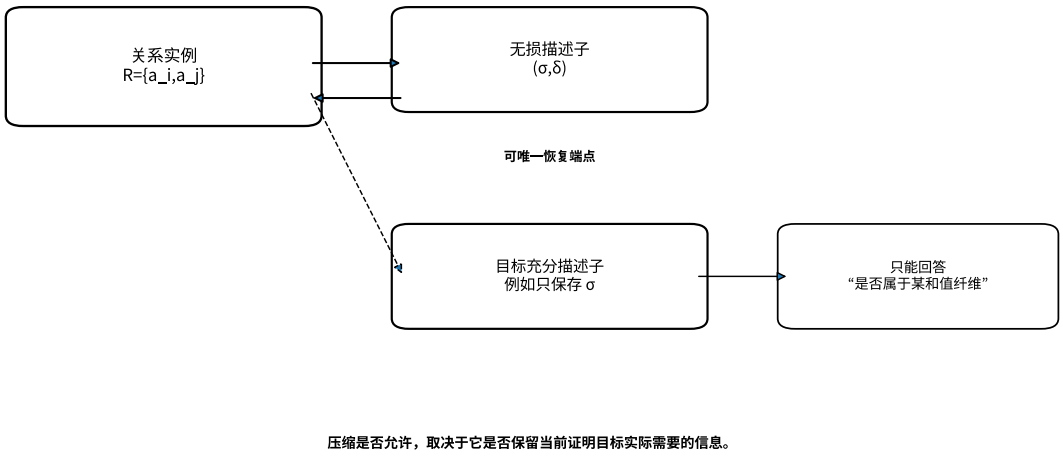


图 2-02　无损描述子与目标充分描述子。 无损描述子必须足以恢复完整关系实例；目标充分描述子只需保留当前目标判定需要的信息。例如 (σ, δ) 可恢复二原子端点，而单独 σ 只能回答固定和值纤维归属，不能恢复完整关系。

第三章　持久关系过滤：旧关系为什么永远不会丢失

设奇素数按大小排列为

$$3 = p_1 < p_2 < p_3 < \cdots,$$

对应低阶原子

$$a_k = \frac{p_k - 1}{2}.$$

记

$$A_k = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

第一篇定义二原子关系层

$$\Gamma_k = \big\{\{a_i, a_j\} : 1 \le i \le j \le k\big\}.$$

第 k 个原子出生时新增关系层

$$\Lambda_k = \{\{a_i, a_k\} : 1 \le i \le k\},$$

并有

$$\boxed{\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \sqcup \Lambda_k.} \tag{3.1}$$

定义 3.1　关系出生层

若

$$r = \{a_i, a_j\}, \qquad i \le j,$$

定义

$$\boxed{b(r) := j.} \tag{3.2}$$

即关系 r 在较晚端点 a_j 出生时第一次进入母体。

定理 3.2　唯一出生层定理

每一条已确认二原子关系

$$r \in \Gamma_\infty$$

都具有唯一出生层

$$b(r).$$

并且

$$r \in \Lambda_{b(r)}.$$

证明

设

$$r = \{a_i, a_j\}, \qquad i \le j.$$

在第 $j-1$ 层，原子 a_j 尚未出现，所以

$$r \notin \Gamma_{j-1}.$$

第 j 层 a_j 出生，并与全部历史原子

$$a_1, \dots, a_j$$

建立关系，因此

$$r \in \Lambda_j \subset \Gamma_j.$$

由于各 Λ_j 两两不交，出生层唯一。证毕。

定理 3.3　低阶关系持久继承定理

若

$$s \ge t,$$

则存在自然嵌入

$$\iota_{t,s}: \Gamma_t \hookrightarrow \Gamma_s$$

且对任意

$$r \in \Gamma_t,$$

有

$$\iota_{t,s}(r) = r.$$

因此

$$\boxed{\Gamma_t \subseteq \Gamma_s.} \tag{3.3}$$

证明

由

$$A_t \subseteq A_s$$

可知，任何由 A_t 中两个原子组成的关系，在 A_s 中仍然由同样两个原子组成。更高层原子的出现不会改变既有端点，也不会改变既有原子身份。

因此旧关系作为同一个关系实例直接保留。证毕。

推论 3.4　读出标签保持

第一篇定义无损关系坐标

$$\Psi(r) = (\sigma(r), \delta(r)).$$

则

$$\boxed{\Psi(\iota_{t,s} r) = \Psi(r).} \tag{3.4}$$

关系进入更高层以后，其和值标签、差值标签和端点身份全部保持不变。

图 2-03　关系出生层与持久继承

关系在较晚端点首次出现的层出生；一旦确认，此后每一层都保留同一关系与读出标签。

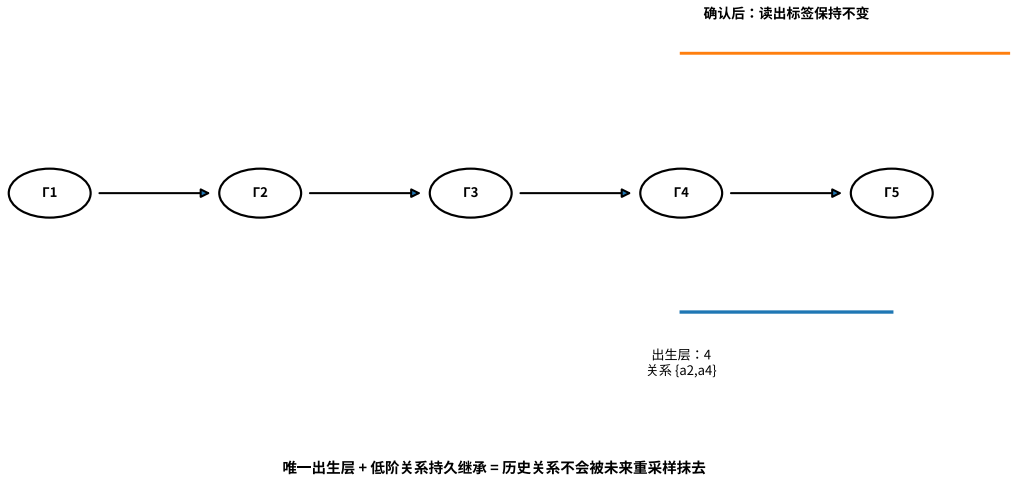


图 2-03　关系出生层与持久继承。 一个关系在较晚端点首次进入母体的唯一层出生；一旦关系被确认，它在所有更高层中保持存在，并保持既有读出标签。这把“出现一次”与“永久保存”连接为同一履历。

第四章　候选关系与确认关系

如果不区分候选关系和确认关系，就会产生表面矛盾：

一方面，关系筛中某些关系会被“杀死”；

另一方面，已确认关系又满足永久持久。

两句话所指的是不同对象。

定义 4.1　候选端点

一个奇数位置 x 在全部必要乘法层认证结束以前，称为**候选原子位置**。

它可能最终成为原子，也可能被某个历史原子射线覆盖。

定义 4.2　候选关系壳

由有限个候选端点组成的关系对象称为**候选关系壳**，记作

$$C.$$

候选关系可以在乘法层中被消解。

定义 4.3　永久关系骨架

若一个有限关系的全部端点都已经被确认是原子，则该关系晋升为母体中的**永久确认关系**。

二原子情况下，它进入

$$\Gamma_{\infty}.$$

因此母体动力学不是

$$\text{确认关系} \to \text{死亡},$$

而是

$$\boxed{\text{候选关系} \to \begin{cases} \text{消解}, \\ \text{确认并晋升}. \end{cases}} \tag{4.1}$$

一旦晋升，就由定理 3.3 永久保存。

图 2-04　候选关系 → 消解 / 确认晋升

每个有限候选关系只有两种终端命运：在有限 first-killer 层真实死亡，或通过全部必要有限层并晋升永久骨架。

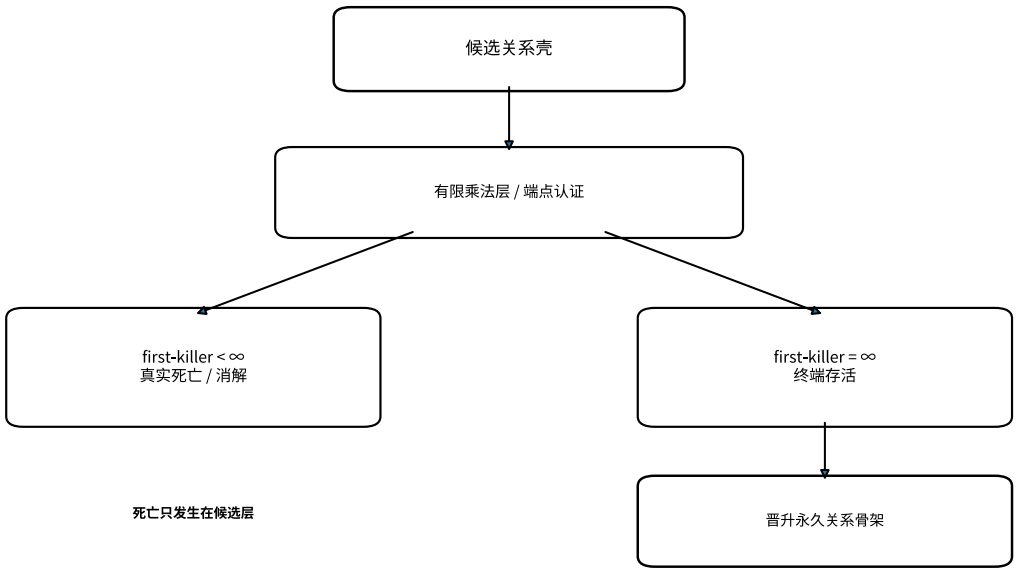


图 2-04　候选关系 → 消解 / 确认晋升。 有限候选关系进入必要的乘法层认证后只有两种终端命运：若存在有限 first-killer，则在唯一责任层真实死亡；若所有端点均为原子，则在有限终端视界存活并不可逆晋升为永久关系。不存在永久未决的第三种状态。

第五章　关系保真状态：为什么一个计数通常不够

固定谱的统一性并不意味着所有关系都可以压成一个标量。

恰恰相反，关系一旦涉及具体配对，位置本身就是信息。

考虑固定偶数 N。

定义无序固定和值关系槽

$$\boxed{\mathcal{S}_N = \{(x, N-x) : 3 \le x \le N/2,\ x \text{ 为奇数}\}.} \tag{5.1}$$

如果只记录

$$|\mathcal{S}_N|,$$

或在某一筛层只记录剩余槽数，就可能丢失下一层更新所需的余类配置。

5.1　显式例子

取

$$N_1 = 2006, \qquad N_2 = 2008.$$

二者具有相同初始槽数

$$H = 501.$$

处理素数层

$$q = 3$$

以后，两者都剩

$$168$$

个候选槽。

因此若状态只保存

$$(H, |S_3|),$$

则两个目标完全相同。

但处理下一层

$$q = 5$$

时：

$$N_1$$

新删除

$$66$$

个槽，而

$$N_2$$

新删除

$$67$$

个槽。

于是下一状态分别为

$$102, \qquad 101.$$

所以：

$$\boxed{(H, |S_q|) \text{ 不能决定下一层更新。}} \tag{5.2}$$

这说明：

具体关系槽的位置和余类配置携带了标量计数丢失的信息。

(5.3)

定义 5.2　关系保真状态

对一个有限关系族 $\mathcal{C}$，若状态记录至少保留：

$$\boxed{\text{关系槽位置} + \text{端点} + \text{当前身份} + \text{必要的死亡履历},} \tag{5.4}$$

并足以确定下一层精确更新，则称其为**关系保真状态**。

关系保真并不要求永远保存一切原始信息。

它要求任何压缩都不能删除当前证明目标实际依赖的信息。

图 2-05　为什么一个计数不够：2006 与 2008

两个固定和值目标在 q=3 层拥有完全相同的标量状态，但由于关系槽的余类配置不同，在 q=5 层发生分叉。

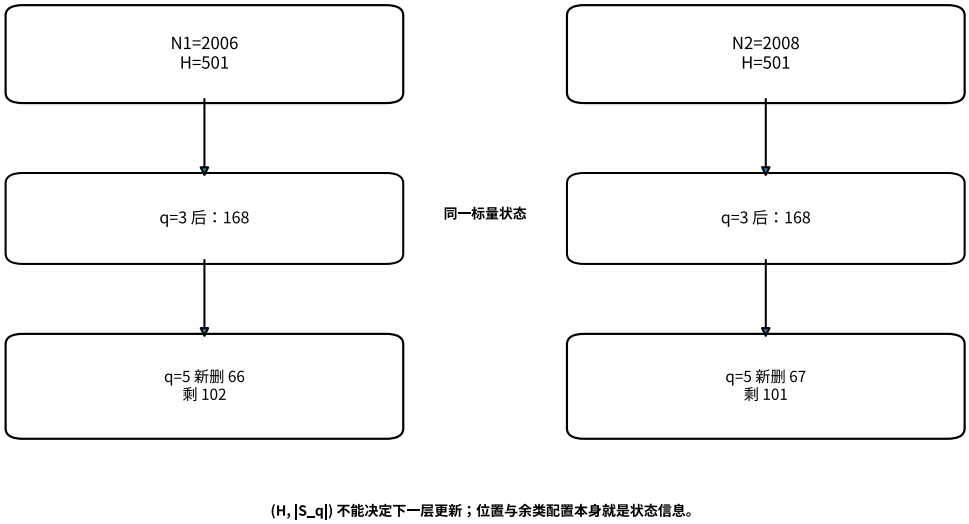


图 2-05　为什么一个计数不够：2006 与 2008。 正文显式例子中，$N_1 = 2006$ 与 $N_2 = 2008$ 都有 $H = 501$ 个初始槽；处理 $q = 3$ 后都剩 168 个，但到 $q = 5$ 时分别新删除 66 与 67 个槽，下一状态变成 102 与 101。因而 $(H, |S_q|)$ 不能决定下一层更新。

第六章　统一移动视界：有限窗口如何获得零误差原子认证

对任意实数

$$X \geq 3,$$

定义低阶坐标窗口

$$\boxed{\mathcal{V}(X) = \{a \geq 1 : \Phi(a) = 2a + 1 \leq X\}.} \tag{6.1}$$

这是一个有限集合。

记

$$\mathcal{P}_{\sqrt{X}} = \{p \text{ 为奇素数} : p \leq \sqrt{X}\}.$$

对应低阶原子集合

$$A_{\sqrt{X}} = \left\{\frac{p-1}{2} : p \in \mathcal{P}_{\sqrt{X}}\right\}.$$

定义历史原子在窗口中的乘法占位场

$$\boxed{\mathcal{M}(X) = \bigcup_{a_i \in A_{\sqrt{X}}} (a_i \star \mathbb{N}_{>0}) \cap \mathcal{V}(X).} \tag{6.2}$$

定理 6.1　有限移动视界原子认证定理

对任意

$$a \in \mathcal{V}(X),$$

有

$$\boxed{a \text{ 是 } \star\text{-原子} \Leftrightarrow a \notin \mathcal{M}(X).} \tag{6.3}$$

换回普通奇数：

$$\boxed{2a + 1 \leq X \text{ 为素数} \Leftrightarrow 2a + 1 \text{ 不被任何 } p \leq \sqrt{X} \text{ 的素数非平凡整除.}} \tag{6.4}$$

证明

若

$$a \in \mathcal{M}(X),$$

则存在历史原子 a_i 和正整数 b，使

$$a = a_i \star b.$$

于是

$$\Phi(a) = \Phi(a_i)\Phi(b),$$

且两个因子都大于 1，所以 $\Phi(a)$ 为合数。

反过来，若

$$\Phi(a) \le X$$

为奇合数，则它具有最小素因子 q，满足

$$q \le \sqrt{\Phi(a)} \le \sqrt{X}.$$

因此

$$q \in \mathcal{P}_{\sqrt{X}}.$$

设

$$q = \Phi(a_i).$$

另一个因子也是不小于 3 的奇数，可写成

$$\Phi(b).$$

于是

$$\Phi(a) = \Phi(a_i)\Phi(b) = \Phi(a_i \star b).$$

由 Φ 单射，

$$a = a_i \star b.$$

故

$$a \in \mathcal{M}(X).$$

证毕。

推论 6.2　有限窗口零误差终端认证

一旦所有不超过

$$\sqrt{X}$$

的原子层已经生成，则窗口

$$\mathcal{V}(X)$$

中每一个位置的原子身份都已完全确定。

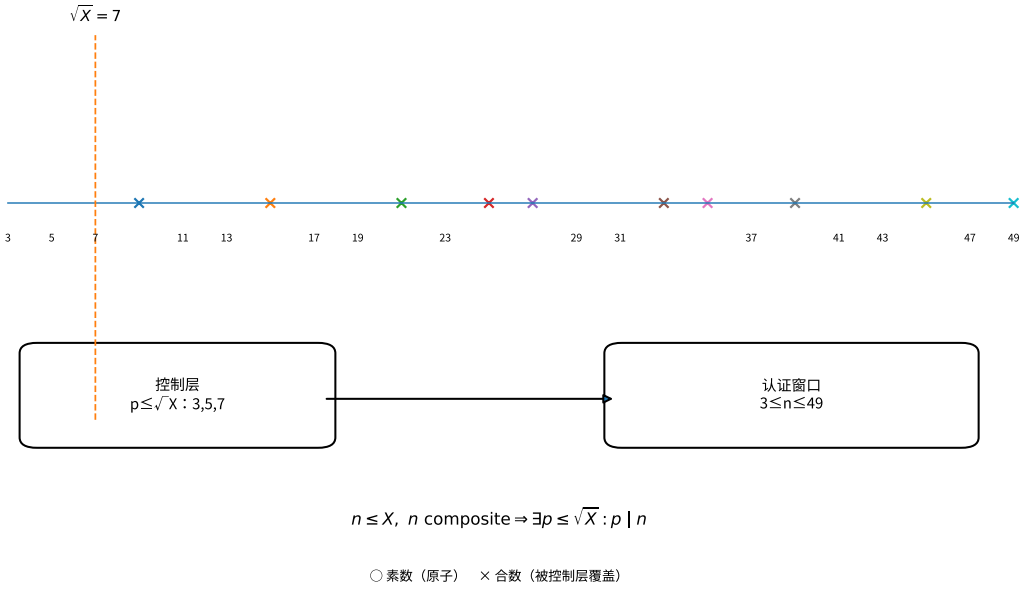
更大的新原子不可能把一个尚未被覆盖的窗口位置重新变成合数。

因此：

$\mathcal{V}(X)$ 是一个真正的终端视界，而不是近似筛选窗口。 (6.5)

图 2-06　有限移动视界与 √X 控制层

示例 X=49：任何 n≤49 的合数都有一个素因子 p≤7，因此有限控制层足以零误差认证整个窗口。



$$n \le X,\ n \text{ composite} \Rightarrow \exists p \le \sqrt{X} : p \mid n$$

○ 素数（原子）　× 合数（被控制层覆盖）

图 2-06　有限移动视界与 √X 控制层。 在有限窗口 $[1, X]$ 中，若一个整数为合数，则它必有不超过 $\sqrt{X}$ 的素因子。因此只需有限历史原子即可对整个窗口完成零误差身份认证。

第七章　素数平方：移动视界的天然离散边界

连续的 X 可以任意移动，但原子认证所需要的历史素数层只在

$$\sqrt{X}$$

穿过一个新素数时发生变化。

设

$$p_k < p_{k+1}$$

为相邻奇素数。

定义平方窗口

$$\boxed{W_k = [p_k^2, p_{k+1}^2).} \tag{7.1}$$

定理 7.1　平方窗口固定历史定理

对任意奇数

$$n \in W_k,$$

若 n 为合数，则 n 至少有一个素因子不超过 p_k。

因此在整个 W_k 中，素性认证所需要的乘法历史层固定为

$$\{3,5,\dots,p_k\}.$$

证明

若 n 为合数，则存在素因子

$$q \le \sqrt{n}.$$

又因为

$$n < p_{k+1}^2,$$

所以

$$q < p_{k+1}.$$

由于 p_k, p_{k+1} 相邻，

$$q \le p_k.$$

证毕。

因此：

$$\boxed{W_1, W_2, W_3, \dots}$$

形成移动视界的自然离散层。

每进入下一个平方窗口，只需要增加一个新的原子除数层。

所以：

素数平方不是额外引入的特殊边界； 它是有限原子认证所需历史层发生变化的天然位置。

(7.2)

并且：

> **视界移动到哪里，取决于哪一层历史信息已经足以使所研究的有限关系永久终端化。**

不同关系可以拥有更经济的适配终端边界，但都服从同一个有限终端原则。

图 2-07　相邻素数平方的自然离散视界

在 W_k=[p_k²,p_{k+1}²) 内，认证合数所需要的历史素数层固定为不超过 p_k 的素数。

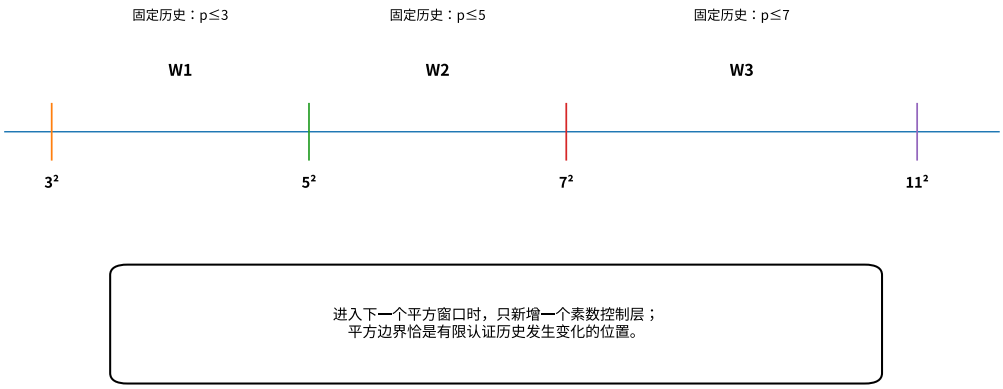


图 2-07　相邻素数平方的自然离散视界。 对相邻奇素数 $p_k < p_{k+1}$，平方窗口 $W_k = [p_k^2, p_{k+1}^2)$ 内任何合数都含有不超过 p_k 的素因子。因此整个窗口所需的历史控制层固定；跨过下一个素数平方时才新增一个控制层。

第八章　真实死亡层：一个合数只第一次死亡一次

普通整除筛会被多个素因子重复命中。

为了建立无重叠的历史分解，必须指定每个合数第一次在哪一层被确定为合数。

对奇合数 n，定义

$$\boxed{\kappa(n) = P^{-}(n).} \tag{8.1}$$

定义 8.1　真实死亡层

对奇素数 q，定义

$$\boxed{D_q = \{n \text{ 为奇合数}: P^{-}(n) = q\}.} \tag{8.2}$$

则

$$\boxed{D_q \cap D_r = \varnothing \qquad (q \neq r).} \tag{8.3}$$

并且所有奇合数恰好属于一个 D_q。

因此：

$$\boxed{\text{每个奇合数只在它的最小素因子层真实死亡一次。}} \tag{8.4}$$

定理 8.2　有限窗口真实死亡完备性

在有限窗口

$$n \leq X$$

中，所有奇合数都属于某个

$$D_q, \qquad q \leq \sqrt{X}.$$

因此执行全部

$$q \leq \sqrt{X}$$

的真实死亡层以后，剩余位置恰为窗口内的奇素数。

证明

由最小素因子性质直接得到。证毕。

这一定理与定理 6.1 是同一个有限终端事实的两种表达：

- 乘法占位语言强调哪些位置被历史射线覆盖；
- 真实死亡语言强调每个复合位置第一次在哪一层退出。

图 2-08　真实死亡层唯一性

一个奇合数可能被多个素数整除，但只在其最小素因子层第一次真实死亡。

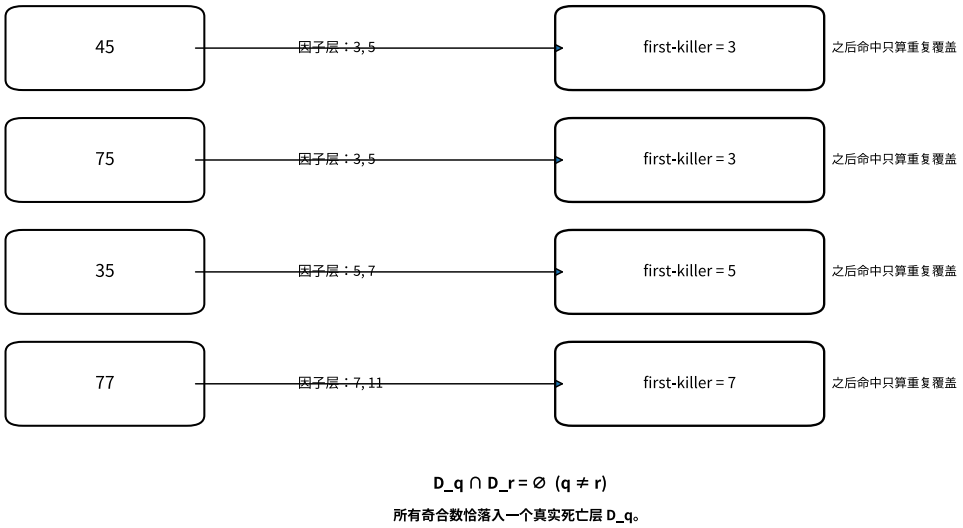


图 2-08　真实死亡层唯一性。 奇合数 n 的真实死亡层由 $\kappa(n) = P^{-}(n)$ 唯一决定。一个合数虽然可能被多个更大素因子再次命中，但这些只属于重复覆盖；真实死亡只发生在最小素因子层，因此不同 D_q 两两不交。

第九章　关系保真筛：从端点死亡到关系死亡

真实死亡可以从单个整数提升到一般有限关系。

设关系实例为

$$r = (n_1, \dots, n_m).$$

若局部谓词要求所有端点均为素数，则任何一个复合端点都足以使关系失败。

定义 9.1　关系 first-killer

若至少一个端点为合数，定义

$$\boxed{\kappa(r) = \min\{P^-(n_i) : n_i \text{ 为合数}\}.} \tag{9.1}$$

称 $\kappa(r)$ 为关系的**第一责任素数**或 **first-killer**。

若全部端点均为素数，则定义

$$\kappa(r) = \infty.$$

定理 9.2　关系唯一真实死亡定理

任何有限全素数型候选关系 r 恰有以下两种可能：

$$\boxed{\begin{cases} \kappa(r) < \infty, & r \text{ 在唯一 first-killer 层第一次真实死亡;} \\ \kappa(r) = \infty, & r \text{ 的全部端点均为素数.} \end{cases}} \tag{9.2}$$

证明

若有复合端点，则有限集合

$$\{P^-(n_i) : n_i \text{ 为合数}\}$$

存在唯一最小值。

在更小素数层，没有任何端点被确认死亡；到 $\kappa(r)$ 层，至少一个端点第一次被确认合数。

若无复合端点，则全部端点均为素数。证毕。

9.1　固定和值关系槽

对固定偶数 N，关系槽

$$(x, N - x)$$

只在以下情形真实死亡：

$$q \mid x, \quad x > q,$$

或

$$q \mid N - x, \quad N - x > q.$$

素数 q 本身不因

$$q \mid q$$

而被删除。

这是关系保真筛与简单“删掉所有 q 的倍数”之间的基本区别。

9.2 终端精确性

若固定和值候选端点都不超过 $N-3$，则处理到

$$q \le \sqrt{N-3}$$

以后，终端幸存槽恰为真实 prime-prime 槽：

$$\boxed{\text{终端关系筛幸存槽} = \text{真实全原子关系槽.}} \tag{9.3}$$

关系筛的功能因此不是估计，而是有限视界内的精确认证。

第十章　有限关系的终端认证

定义 10.1　有限支撑关系

设

$$R = (x_1, \dots, x_r)$$

为有限关系对象，每个 x_j 是低阶奇数坐标。

其普通奇数端点为

$$\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_r).$$

若所有端点均为原子，则称 R 为**真实原子关系**。

定义

$$\boxed{M(R) = \max_{1 \le j \le r} \Phi(x_j).} \tag{10.1}$$

定理 10.2　有限关系终端认证定理

任何有限支撑关系 R 的全部端点身份，都可以在有限视界

$$\boxed{\mathcal{V}(M(R))}$$

中完成零误差认证。

更具体地，只需要执行所有

$$q \le \sqrt{M(R)}$$

的真实死亡层。

证明

对每个端点

$$\Phi(x_j) \le M(R),$$

由定理 6.1，其素性只需要检查不超过

$$\sqrt{M(R)}$$

的素因子层。

端点个数有限，所以全部端点同时在同一个有限视界内完成认证。证毕。

推论 10.3　有限关系必有有限终端视界

定义

$$\tau(R)$$

为使 R 的全部端点身份永久确定的最小视界层。

则

$$\boxed{\tau(R) < \infty.} \tag{10.2}$$

因此：

任何有限端点的素数关系，都不需要无穷信息才能获得最终身份。

(10.3)

定理 10.4　候选关系二分定理

每个有限候选关系 R 恰好落入以下两类之一：

$$\boxed{\begin{cases} \kappa(R) < \infty, & \text{在有限乘法层被真实消解;} \\ \kappa(R) = \infty, & \text{全部端点为原子，并在有限视界完成终端认证.} \end{cases}} \tag{10.4}$$

不存在第三种永久未决状态。

证明

端点数有限。

若至少一个端点为合数，则其最小素因子有限，从而

$$\kappa(R) < \infty.$$

若没有复合端点，则所有端点均为素数；由定理 10.2，在有限视界内全部得到认证。证毕。

第十一章　从候选壳晋升到永久关系骨架

定义晋升映射

$$\boxed{\Pi: \mathcal{C}^{\mathrm{surv}} \to \Gamma^{\mathrm{perm}},} \tag{11.1}$$

其中：

- $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}$ 表示已经通过全部必要有限乘法层的候选关系；
- Γ^{perm} 表示永久确认关系骨架。

二原子情况下，

$$\Gamma^{\mathrm{perm}} = \Gamma_{\infty}.$$

定理 11.1　晋升不可逆定理

若候选关系 R 已经完成终端认证并晋升为永久原子关系，则在任何更大视界中仍保持真实。

即：

$$\boxed{R \in \Gamma_t \Rightarrow R \in \Gamma_s \qquad (s \geq t).} \tag{11.2}$$

证明

晋升意味着所有端点已经确认是原子。素数身份不会因更大素数出现而改变。

再由持久嵌入，

$$\Gamma_t \subseteq \Gamma_s.$$

证毕。

因此：

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{候选关系出生} \\ \downarrow \\ \text{有限乘法层认证} \\ \downarrow \\ \begin{cases} \text{真实死亡,} \\ \text{终端存活} \end{cases} \\ \downarrow \\ \text{终端存活者晋升} \\ \downarrow \\ \text{永久关系骨架.} \end{array}} \tag{11.3}$$

“死亡”只发生在候选层；

“历史不丢失”只作用于已经晋升的永久层。

二者完全兼容。

第十二章　关系履历：对象不仅有结果，还有生成历史

定义 12.1　关系履历

对有限关系 R，定义

$$\boxed{\mathcal{H}(R) = (\mathrm{supp}R,\ b(R),\ \tau(R),\ \kappa(R),\ \mathrm{Lab}(R),\ \mathrm{Status}(R)).} \tag{12.1}$$

其中：

- $\mathrm{supp}R$：有限端点集合；
- $b(R)$：关系进入候选或确认结构的出生层；
- $\tau(R)$：使其身份永久确定的最小终端视界；
- $\kappa(R)$：真实死亡层；真实原子关系取 ∞；
- $\mathrm{Lab}(R)$：和值、差值、模板、窗口或其他读出标签；
- $\mathrm{Status}(R)$：候选、死亡或永久确认状态。

定理 12.2　履历保持定理

若 R 已经晋升为永久关系，则所有更高视界都保留：

$$\mathrm{supp}R,\qquad b(R),\qquad \mathrm{Lab}(R),\qquad \mathrm{Status}(R) = \mathrm{persistent}.$$

更高层只增加新的关系履历，不重写旧履历。

因此母体不是一张每层重新计算的关系表，而是一个不断增长的历史账本：

$$\boxed{\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \cdots.} \tag{12.2}$$

这就是“关系是历史”的最低阶严格形式。

图 2-09　关系履历账本

关系对象不仅保存最终真假，还保存支撑、出生、终端、死亡责任、读出标签与当前状态。

字段	含义	典型值
supp R	有限端点集合	{n1,⋯,nm}
b(R)	关系出生层	k
τ(R)	最小终端视界	finite
κ(R)	真实死亡层	q 或 ∞
Lab(R)	和值 / 差值 / 模板 / 窗口标签	σ,δ,H,I_n,⋯
Status(R)	候选 / 死亡 / 永久确认	candidate / dead / persistent

更高视界只追加新的履历，不重写已经永久确认的旧履历。

L1 ⊆ L2 ⊆ L3 ⊆ ⋯

图 2-09　关系履历账本。 关系履历 $\mathcal{H}(R)$ 同时记录有限支撑 supp$R$、出生层 $b(R)$、终端视界 $\tau(R)$、真实死亡层 $\kappa(R)$、读出标签 Lab(R) 与状态 Status(R)。更高层只追加新履历，不重写已经永久确认的旧履历。

第十三章　出生与死亡存在严格时间错位

一个新素数

$$q$$

一旦作为原子出生，就立即与全部历史原子建立新的加法关系。

但若把 q 看作新的最小素因子死亡层，它第一次真正产生此前没有发生过的复合死亡，至少要到

$$q^2.$$

因为若

$$n = qm$$

且

$$m < q,$$

那么 m 含有某个素因子

$$r < q,$$

于是 n 在更早的 r-层已经死亡。

因此：

$$\boxed{\text{以 } q \text{ 为最小素因子的第一个整数是 } q^2.} \tag{13.1}$$

定理 13.1　原子出生—真实死亡时间错位定理

新原子 q 的两个作用满足：

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{关系通道：} & q \text{ 出生时立即产生新关系;}\\ \text{死亡通道：} & q \text{ 作为新最小素因子至少从 } q^2 \text{ 才开始产生真实死亡.}\end{array}} \tag{13.2}$$

所以：

$$\boxed{\text{不可约出生先发生；　新的最小因子死亡后发生。}} \tag{13.3}$$

原子不是被动等待关系出现。它在出生时立即向关系母体贡献一整层结构，而其独占乘法死亡作用要在更高尺度才开始显现。

第十四章　移动视界不是创造关系，而是终端读取关系

真实关系在原子出生时已经进入历史母体。

移动视界的作用不是重新生成这些关系，而是回答：

> 哪些有限关系已经进入未来无法改写的终端区域？

因此：

$$\boxed{\text{关系出生} \neq \text{关系进入终端视界.}} \tag{14.1}$$

一条关系可能早已存在于历史母体中，但直到某个更高视界，它才作为某个读出的完整有限对象获得终端认证。

所以：

$$\boxed{\text{移动视界不是关系生成器，而是关系终端化与读出装置。}} \tag{14.2}$$

这一点尤其适用于固定和值和固定差：

- 固定和值关系可能早已出生，某个目标纤维只是在适配终端视界中被完整读取；
- 固定差关系的有限候选可在平方视界中完成双端认证，并晋升为永久真实关系。

第十五章　统一视界与读出适配视界

全书只使用一条移动视界原则：

只要全部可能改变某个有限关系身份的历史原子层都已经进入， 该关系就终端冻结。

(15.1)

通用形式是

$$\mathcal{V}(X),$$

其认证深度为

$$\sqrt{X}.$$

但不同关系可由同一原则导出更经济的**读出适配终端视界**。

这不是另一套理论，而是对同一个有限终端原则进行最小化。

15.1　固定和值读出的适配终端

若二原子关系满足

$$a_i + a_j + 1 = m,$$

则任一端点都严格小于 m。

因此，当历史原子已经越过所有可能参与该和值的端点以后，更大的原子不可能再改变这一固定和值纤维。

固定和值由此具有自己的有限自然终端段。

15.2　固定有限端点读出的适配终端

若关系端点已经明确给定，例如固定差双端候选或有限模板，则只需要推进到最大端点的平方根深度。

因此固定差和一般有限模板天然服从平方终端原则。

15.3　窗口读出的适配终端

若目标只要求判断有限窗口

$$I = [L, U]$$

中是否存在素数，则认证深度由窗口最大端点 U 决定。

处理全部

$$q \le \sqrt{U}$$

的真实死亡层后，窗口内素数集合完全确定。

15.4 一般有限关系的适配终端

对位置映射族

$$f_1, \dots, f_m,$$

在固定参数 (Θ, x) 上定义

$$M_{\Theta,x} = \max_i |f_i(x;\Theta)|.$$

只要所有目标位置均为正整数且局部谓词只依赖这些位置的有限算术身份，则

$$\boxed{\tau(\Theta, x) \le \sqrt{M_{\Theta,x}}} \tag{15.2}$$

给出一个统一终端上界。

因此：

终端视界 = 已经包含全部可能改变当前有限关系身份的历史信息。

(15.3)

第十六章　关系还原的统一规范形

第一篇给出局部关系规范形：

$$R_\Theta(x) = \mathcal{B}(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \dots, \boldsymbol{I}(f_m(x;\Theta))).$$

本篇在此基础上加入关系履历。

定义完整有限关系状态：

$$\boxed{\mathfrak{R}_{\Theta,x} = (\Theta, x, (f_i)_{i=1}^m, (f_i(x;\Theta))_{i=1}^m, (\boldsymbol{I}(f_i(x;\Theta)))_{i=1}^m, \mathcal{B}, \mathcal{H}).} \tag{16.1}$$

其中：

- 参数 Θ 决定关系族；
- anchor x 决定具体关系实例；
- f_i 保存位置映射；
- $f_i(x;\Theta)$ 保存具体位置；
- $\boldsymbol{I}$ 保存固定身份；
- $\mathcal{B}$ 给出局部关系谓词；
- $\mathcal{H}$ 保存关系出生、死亡、终端与持久履历。

这就是关系还原的完整有限对象。

如果某种压缩仍能从中恢复目标所需的全部结构，则可以使用该压缩；如果不能，则压缩不应替代关系对象。

第十七章　有限视界如何进入无限量词

有限终端性解决了每个有限关系怎样获得最终身份。

进入无限量词时，问题进一步转化为：

> 这些有限终端结果怎样覆盖整个无穷参数族？

这一步不能由“每个实例有限”自动推出。

必须根据外层量词分别处理。

17.1　无限回归

设

$$R(x) \in \{0,1\}.$$

定义累计计数

$$\boxed{C_R(X) = \sum_{x \le X} R\,(x).} \tag{17.1}$$

则有精确等价：

$$\boxed{\exists^{\infty} x : R(x) = 1 \Leftrightarrow C_R(X) \text{ 无界}.} \tag{17.2}$$

证明

若命中无限多，则累计计数可超过任意给定整数。

反之，若累计计数无界，则命中集合不可能有限。证毕。

这类量词适用于 Twin、固定模板无限回归、Mersenne 无限性等。

17.2　逐参数全称纤维

设

$$R_\theta(x)$$

为参数 θ 下的局部关系。

定义纤维计数

$$\boxed{C(\theta) = \sum_{x} R_\theta\,(x).} \tag{17.3}$$

则

$$\boxed{\forall \theta\ \exists x : R_\theta(x) = 1 \Leftrightarrow C(\theta) > 0 \quad \forall \theta.} \tag{17.4}$$

这类量词适用于固定和值型问题。

因此全称证明的核心不是逐个手工寻找 witness，而是建立统一正下界：

$$\boxed{C(\theta) \geq L(\theta) > 0.} \tag{17.5}$$

17.3 窗口全称

给定窗口族

$$I_n,$$

定义

$$\boxed{W(n) = \sum_{m \in I_n} \alpha\,(m).} \tag{17.6}$$

则

$$\boxed{\forall n\ \exists p \in I_n \cap \mathbb{P} \Leftrightarrow W(n) \geq 1 \quad \forall n.} \tag{17.7}$$

Legendre、Oppermann 都属于这一类型。

17.4 任意长度关系

设

$$R_{k,\theta}(x)$$

表示长度参数为 k 的关系。

定义截止视界 X 内的最大已实现长度：

$$\boxed{L(X) = \max\{k : \exists \theta, x \leq X,\ R_{k,\theta}(x) = 1\}.} \tag{17.8}$$

则：

$$\boxed{\forall k\ \exists \theta, x : R_{k,\theta}(x) = 1 \Leftrightarrow L(X) \text{ 无界}.} \tag{17.9}$$

这类量词适用于任意长等差素数列。

17.5 参数无限

有时关注的不是 anchor 命中无限多，而是参数本身有无限多个成功值。

定义

$$\boxed{P(X) = \#\{\theta \leq X : \exists x,\ R_\theta(x) = 1\}.} \tag{17.10}$$

则

$$\boxed{\exists^{\infty}\theta\ \exists x : R_\theta(x) = 1 \Leftrightarrow P(X) \text{ 无界}.} \tag{17.11}$$

17.6 逐索引全称谓词

Andrica、Firoozbakht、Brocard、Grimm 等问题具有形式：

$$\boxed{\forall n, \quad P(n).} \tag{17.12}$$

定义失败计数

$$\boxed{F(X) = \sum_{n \le X} \mathbf{1}_{\{\neg P(n)\}}.} \tag{17.13}$$

全称命题等价于：

$$\boxed{F(X) = 0 \quad \text{对所有 } X.} \tag{17.14}$$

若能建立一个统一机制，证明任何最小失败点都不可能存在，则全称命题闭合。

图 2-10　有限冻结层如何进入全局量词

有限终端只解决局部身份；进入无限/全称命题时，必须再匹配正确的量词证书。

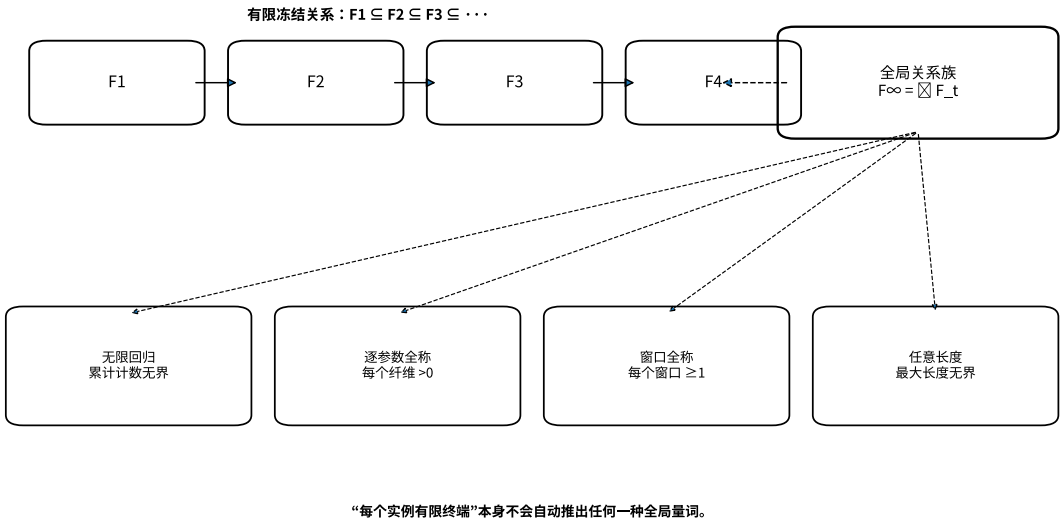


图 2-10　有限冻结层如何进入全局量词。 有限终端性只说明每个有限对象最终可冻结；进入全局命题时还必须选择与外层量词匹配的证书。无限回归读取累计计数无界，逐参数全称读取每个纤维非空，窗口全称读取每个窗口有命中，任意长度读取最大已实现长度无界。

第十八章　有限—无限入口定理

设某类关系在第 t 个有限终端层形成冻结集合

$$F_t.$$

假设：

$$F_t \subseteq F_{t+1}.$$

定义全局关系族

$$\boxed{F_\infty = \lim_{\rightarrow t} F_t = \bigcup_{t\geq 1} F_t.} \tag{18.1}$$

定理 18.1　有限—无限入口定理

在持久条件下，

$$\boxed{F_\infty \text{ 为无限集} \Leftrightarrow \forall T,\ \exists t > T \text{ 使 } F_t \backslash F_T \neq \varnothing.} \tag{18.2}$$

即：

$$\boxed{\text{全局关系无限} \Leftrightarrow \text{移动视界不存在最后一个产生新冻结关系的层.}} \tag{18.3}$$

证明

若 F_∞ 无限，而存在 T 使所有 $t > T$ 均满足

$$F_t = F_T,$$

则

$$F_\infty = F_T.$$

但 F_T 是有限视界中的有限关系集，矛盾。

反之，若对任意 T 都有更晚层产生至少一个新冻结关系，则可递归选取严格增加的关系序列

$$R_1, R_2, \ldots,$$

其中每个 R_j 在更晚视界中新出现。因此 F_∞ 含有无穷多个不同关系。证毕。

因此：

无限不是一次性验收一个无限对象； 无限是有限冻结关系没有最终停止的持续出生。

(18.4)

第十九章　不同全称量词如何进入同一个母体

固定和值型问题要求：

$$\forall \theta\ \exists x.$$

无限回归型问题要求：

$$\exists^{\infty} x.$$

窗口型问题要求：

$$\forall n\ \exists x \in I_n.$$

任意长度型问题要求：

$$\forall k\ \exists \theta, x.$$

这些量词不同，却共享同一有限基础：

1. 每个有限关系实例都有有限终端视界；
2. 已冻结关系永久保持；
3. 新原子继续产生新候选与新确认关系；
4. 所有全局命题都建立在有限终端关系之上。

因此：

$$\boxed{\text{统一母体} \neq \text{统一量词.}} \tag{19.1}$$

统一的是关系对象与有限终端结构；

不同量词必须使用各自正确的全局判定。

这也是“批量论证”能够出现的原因：

$$\boxed{\text{先把局部关系统一；　　再按量词类型统一处理整个参数族。}} \tag{19.2}$$

第二十章　批量论证的有限基础

逐个验证关系实例只能给出有限事实。

要覆盖一个参数族，需要统一证书。

设参数空间为

$$\Theta,$$

目标命题为

$$\mathcal{P}(\theta).$$

定义 20.1　批量证书

设

$$\mathcal{S}$$

为证书状态空间。

若存在映射

$$\boxed{\mathcal{C}:\Theta\to\mathcal{S}} \tag{20.1}$$

并满足：

覆盖性

每个

$$\theta\in\Theta$$

都进入某个合法证书状态；

正确性

每个合法证书状态都推出

$$\mathcal{P}(\theta),$$

则称 $\mathcal{C}$ 为该参数族的**批量证书**。

于是得到：

$$\boxed{\forall\theta\in\Theta,\quad \mathcal{P}(\theta).} \tag{20.2}$$

批量论证的关键不是“同时计算很多实例”，而是：

$$\boxed{\text{同一个有限规则一次覆盖一个完整参数类。}} \tag{20.3}$$

第二十一章　有限闭合的四种基本形式

有限结构进入全称或无限结论，必须经过明确闭合机制。

21.1　有限商闭合

若无限参数族在某种等价关系下只有有限个状态：

$$\Theta/\sim=\{s_1,\dots,s_m\},$$

并且同一状态中的参数具有相同目标结论，则只需证明有限个状态。

典型来源包括有限模余类、CRT 状态和有限自动机状态。

21.2　传播闭合

若存在递推规则：

$$\boxed{P_n \Rightarrow P_{T(n)}} \tag{21.1}$$

并且起始集合与传播轨道覆盖全部参数，则有限起点加传播规则即可闭合全称。

21.3　累计势闭合

若关系累计量满足：

$$C(X)\geq E(X),$$

并且

$$\boxed{\limsup_{X\to\infty} E(X)=+\infty,} \tag{21.2}$$

则累计命中无界，从而关系无限回归。

21.4　坏状态排除闭合

若定义所有可能导致失败的坏状态集合

$$\mathcal{F}_{\text{bad}},$$

并证明实际可达状态集合

$$\mathcal{R}$$

满足

$$\boxed{\mathcal{F}_{\text{bad}}\cap\mathcal{R}=\varnothing,} \tag{21.3}$$

则失败不可能发生。

这些闭合形式将在具体关系中以不同方式出现。

第二十二章　四个基本例子

22.1　固定和值

给定偶数 N：

$$R_N(p) = \alpha(p)\alpha(N-p).$$

每个具体 p 的局部关系在有限视界内终端。

但全称命题要求：

$$\boxed{\forall N \in 2\mathbb{Z}_{\geq 4},\quad \sum_p R_N(p) > 0.} \tag{22.1}$$

所以局部终端认证不等于全称覆盖。

这里的关键量是整个固定和值纤维是否非空。

22.2　固定差

给定 d：

$$R_d(p) = \alpha(p)\alpha(p+d).$$

每个候选对在

$$\sqrt{p+d}$$

以内完成终端认证。

若问题要求无限多，则应证明：

$$\boxed{\sum_{p \leq X} R_d(p) \to \infty} \tag{22.2}$$

或等价的无界性。

22.3　平方窗口

给定

$$I_n = (n^2, (n+1)^2),$$

窗口终端认证是有限的。

若问题要求每个窗口都非空，则必须证明：

$$\boxed{\sum_{m \in I_n} \alpha(m) \geq 1 \qquad \forall n.} \tag{22.3}$$

22.4 有限模板

给定

$$H = \{h_1, \dots, h_k\},$$

定义

$$R_H(n) = \prod_{j=1}^{k} \alpha\,(n + h_j).$$

固定 n 的模板实例在有限视界内完全终端。

但“模板无限出现”要求累计命中无界：

$$\boxed{C_H(X) = \sum_{n \le X} R_H\,(n) \to \infty \text{ 或至少无界.}} \tag{22.4}$$

因此有限终端与无限关系之间始终隔着量词层。

第二十三章　统一动力学：出生、消解、晋升、持久、读出

把前两篇合并，可得到完整动力学流程。

乘法侧：

$$\boxed{\text{历史乘法占位} \to \text{最小逃逸} \to \text{新原子出生.}}$$

关系侧：

$$\boxed{\text{新原子} \to \text{整层新关系.}}$$

候选层：

$$\boxed{\text{候选关系} \to \begin{cases}\text{在 first-killer 层真实死亡,}\\ \text{通过全部必要有限层.}\end{cases}}$$

终端存活者：

$$\boxed{\text{终端认证} \to \text{晋升永久关系} \to \text{历史永不删除.}}$$

读出层：

$$\boxed{\text{移动视界} \to \text{读取终端关系} \to \text{形成局部切片.}}$$

量词层：

$$\boxed{\text{局部切片} \to \text{批量证书} \to \text{全称或无限结论.}}$$

因此全书统一动力学可写成：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{原子出生}\\ \downarrow\\ \text{关系出生}\\ \downarrow\\ \text{有限候选认证}\\ \downarrow\\ \text{死亡或晋升}\\ \downarrow\\ \text{永久关系骨架}\\ \downarrow\\ \text{移动视界终端读取}\\ \downarrow\\ \text{关系切片}\\ \downarrow\\ \text{量词闭合.}\end{array}} \tag{23.1}$$

图 2-11　第二篇总证明链

第二篇把第一篇的生成关系母体变成“可终端认证、可保存履历、可进入全局量词”的有限接口。



图 2-11　第二篇总证明链。 第二篇把关系实例经过候选壳、有限移动视界与真实死亡责任，推进到终端认证；终端存活者不可逆晋升永久关系并保留履历，再通过关系切片与匹配量词进入批量证书。这就是从有限关系到全局命题的完整接口。

第二十四章　本篇基础定理总表

基础定理 F　低阶关系持久继承

$$\boxed{\Gamma_t \hookrightarrow \Gamma_s \qquad (s \geq t).}$$

确认关系只增不删。

基础定理 G　有限移动视界原子认证

对任意有限 X：

$$\boxed{\Phi(a) \leq X \Rightarrow \text{其原子身份由不超过 } \sqrt{X} \text{ 的原子层完全决定.}}$$

基础定理 H　平方视界固定历史

在

$$[p_k^2, p_{k+1}^2)$$

中，全部复合身份均可由不超过 p_k 的历史素数层完全判定。

基础定理 I　唯一真实死亡

每个奇合数只在其最小素因子层真实死亡一次。

任一有限候选关系若不是全原子关系，也只具有唯一 first-killer 层。

基础定理 J　有限关系终端性

任意有限支撑关系 R 都存在

$$\boxed{\tau(R) < \infty.}$$

更高层信息最终不再能够改变它的局部身份。

基础定理 K　晋升不可逆

一旦有限关系完成原子认证并进入永久关系骨架，则在所有更高视界中保持不变。

基础定理 L　有限—无限入口

若某类冻结关系满足持久嵌入，则

$$\boxed{\text{其全局关系族无限} \Leftrightarrow \text{不存在最后一个产生新冻结关系的移动视界.}}$$

基础定理 M　无限回归计数判据

$$\boxed{\exists^{\infty}x\colon R(x)=1 \Leftrightarrow \sum_{x\le X} R\,(x) \text{ 无界.}}$$

基础定理 N　逐参数全称纤维判据

$$\boxed{\forall\theta\ \exists x\colon R_{\theta}(x)=1 \Leftrightarrow \sum_{x} R_{\theta}\,(x)>0 \quad \forall\theta.}$$

第二十五章　关系层不能被固定谱抹去

本篇的全部结构可以压缩成一个重要结论。

固定谱提供：

$$\boldsymbol{I}(n).$$

但一个关系命题需要：

$$\boxed{\text{位置映射} + \text{端点对应} + \text{局部谓词} + \text{关系履历} + \text{外层量词}.} \tag{25.1}$$

因此：

$$\boxed{\text{固定谱不代替关系；}\quad\text{固定谱使关系能够被精确读取。}} \tag{25.2}$$

关系理论的价值也不因身份固定而降低。

相反，只有关系层被还原到足够低阶，才能把看似不同的经典问题放进同一母体。

所以真正的统一不是：

“所有猜想都只是查表。”

而是：

所有猜想都可以共享一张事实谱，但每一种关系都必须忠实保留自己的结构。 (25.3)

这也是批量论证能够成立的前提。

如果关系在进入统一框架时已经损失了决定目标命题的信息，那么再强的统一语言也不能恢复已经丢失的结构。

第二十六章　有限层与全局命题之间的纪律

一个常见误解是：

> 既然每个有限关系都能在有限视界中终端，那么全局猜想也随之成立。

这是错误的。

有限终端性只说明：

$$\boxed{\text{每个具体实例的真假可以有限决定。}} \tag{26.1}$$

而全称或无限命题还要求：

$$\boxed{\text{整个参数族满足某种统一全局性质。}} \tag{26.2}$$

例如：

$$\forall N\ \exists p$$

不能由“每个给定 N 可以有限检查”直接推出。

同样：

$$\exists^{\infty} p$$

也不能由“每个给定 p 可以有限判断”直接推出。

因此：

$$\boxed{\text{有限终端解决局部可判定；　批量闭合解决全局量词。}} \tag{26.3}$$

两者缺一不可。

第二十七章　关系保真筛的通用技术接口

关系保真筛不局限于固定和值。

对任何有限位置族

$$f_1(x;\Theta),\dots,f_m(x;\Theta),$$

都可以建立如下状态：

$$\boxed{\mathcal{S}_{\Theta,x}=((f_i(x;\Theta))_{i=1}^m,(\mathsf{status}_i)_{i=1}^m,(\kappa_i)_{i=1}^m,\kappa(r),\mathsf{Status}(r)).} \tag{27.1}$$

其中：

- status_i 表示端点尚未终端、已确认原子或已确认合数；
- κ_i 表示端点最小素因子责任；
- $\kappa(r)$ 表示关系 first-killer；
- $\mathsf{Status}(r)$ 表示候选、死亡或永久状态。

这一接口适用于：

- 固定和值；
- 固定差；
- prime tuples；
- 有限仿射关系；
- 有限多项式束；
- 任意有限线性关系族。

关系筛的核心状态不是 survivor 数量，而是**完整关系实例及其终端履历**。

第二十八章　从有限终端到统一关系理论

本篇建立了四个彼此不可替代的层次。

第一层是事实：

$$\boxed{\boldsymbol{I}(n)}$$

给出整数固定身份。

第二层是关系：

$$\boxed{r_{\Theta,x} = (f_1, \cdots, f_m)}$$

规定哪些位置组成一个对象。

第三层是有限终端：

$$\boxed{\tau(r) < \infty.}$$

每个有限关系都能在有限视界中获得最终局部身份。

第四层是量词：

$$\boxed{\forall, \quad \exists, \quad \exists^{\infty}, \quad \forall k \exists \cdots}$$

决定一个局部关系要怎样扩展成全局命题。

统一素数关系理论并不把这四层压成一层。

它们的力量恰恰来自严格分层：

$$\boxed{\text{身份固定} \Rightarrow/ \text{关系自动成立,}}$$

$$\boxed{\text{关系可判定} \Rightarrow/ \text{全称自动闭合,}}$$

但同时：

$$\boxed{\text{固定身份} + \text{关系还原} + \text{有限终端} + \text{量词闭合}}$$

给出了统一处理素数关系问题的完整路线。

结语　无限关系的数学入口是有限终端

第一篇建立：

原子怎样生成，关系怎样出生，历史怎样累积.

本篇进一步建立：

关系怎样被忠实保存，怎样在有限视界内获得最终身份.

二者结合以后，统一母体的动力学结构为：

$$\boxed{\text{旧关系持久} + \text{新关系持续出生} + \text{有限关系最终冻结.}}$$

于是无限不再需要一次性作为一个完成对象被整体操作。

它由一系列有限、完整、可验收、彼此兼容的关系层持续形成：

$$\boxed{F_1 \hookrightarrow F_2 \hookrightarrow F_3 \hookrightarrow \cdots, \qquad F_\infty = \varinjlim_t F_t.}$$

所以：

有限移动视界不是无限关系的截断； 它是无限关系获得严格数学身份的入口。

但这一结论还必须与另一句话同时保留：

$$\boxed{\text{固定谱只是事实底座；} \quad \text{关系还原才使事实成为关系命题。}}$$

因此统一素数关系理论的真正能力，不来自忽略关系差异，而来自把关系差异研究得足够清楚。

当关系位置、端点对应、出生与死亡、终端视界、读出标签和外层量词都得到精确表达以后，固定和值、固定差、窗口、有限模板、仿射、多项式、相邻素数和完整因子身份，才可以在同一母体中被批量组织，而不丢失各自真正决定命题的结构。

由此得到本篇最后的总式：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{固定身份谱}\\ \Downarrow\\ \text{关系实例}\\ \Downarrow\\ \text{关系保真状态}\\ \Downarrow\\ \text{有限移动视界}\\ \Downarrow\\ \text{真实死亡或终端晋升}\\ \Downarrow\\ \text{永久关系骨架}\\ \Downarrow\\ \text{关系切片}\\ \Downarrow\\ \text{量词判定.}\end{array}}$$

这条链条把“事实”“关系”“有限”“无限”放进同一套严格次序中。

它既不把关系神秘化，也不把关系消解为固定谱的简单查询。

它保留了素数关系真正需要保留的全部结构。

第三篇　关系切片、导出几何、量词结构与批量论证

——从和—差—积关系平面到一般关系语言、全称判定与无限性

本篇主旨

固定谱使不同素数问题共享同一事实底座；关系还原则保证这种统一不会损失问题本身。

因此，统一素数关系理论的第三层不是把不同问题化成同一个数字，而是先把对象之间真正存在的几何关系保存下来，再把这些关系写成同一种**关系语言**：

$$ext关系几何 \to ext关系切片 \to ext关系语法 \to ext量词.$$

二原子关系首先形成一个无损的和—差平面；和值、差值和积值在同一平面上分别形成直线叶、直线叶与双曲叶；端点身份又可以通过异向壳的唯一交点恢复。只有在这一层关系几何被保存以后，统一语法才不会把不同问题压扁。 ::: {custom-style="BoxedCallout"}

$$\text{位置映射} + \text{局部关系谓词} + \text{外层量词}.$$

在这个层次上，Goldbach、Twin、Polignac、Sophie Germain、prime tuples、Green–Tao、Legendre、Oppermann、Brocard、Andrica、Firoozbakht、Mersenne、Bunyakovsky、Schinzel H、Grimm、Erdős–Woods 等问题不再需要各自建立一套底层对象。

但统一绝不意味着关系可以被抹去。

高阶表达必须能够回到低阶见证；　　任何不能恢复目标关系的压缩，都不能替代目标关系。

在此基础上，逐个问题的证明可以提升为**批量论证**：一个统一证书一次覆盖整个参数族；全称与无限不再混在一起，而分别具有自己的严格判定形式。

:::

摘要

前两篇已经建立两类基本结构。

第一类是固定算术身份谱

$$\boldsymbol{I}(n),$$

它给出整数的素数、合数、最小素因子、乘法深度和完整素因子集合等固定身份。

第二类是关系还原与有限终端。任何有限关系都可以保存其位置映射、端点、身份和履历，并在有限移动视界中得到终端认证；已经确认的关系在更高视界中永久保持。

本篇建立第三层：**统一关系语言与量词结构**。

首先从二原子关系母体出发。对原子

$$a \le b$$

定义

$$m = a + b + 1, \qquad h = b - a.$$

对应普通奇素数

$$p = 2a + 1, \qquad q = 2b + 1,$$

有

$$p + q = 2m, \qquad q - p = 2h,$$

并且反演为

$$p = m - h, \qquad q = m + h.$$

于是每个无序奇素数对都唯一对应一个关系平面点

$$(m, h).$$

固定 m 是固定和值切片；固定 h 是固定差切片；固定较大原子则形成一条斜向关系星。Goldbach 与 Twin 因而是同一二原子关系平面的不同方向读出。

同一个关系平面还天然携带乘积坐标：

$$(m - h)(m + h) = m^2 - h^2.$$

因此固定积 M 对应双曲叶

$$\boxed{m^2 - h^2 = M.}$$

若定义关系总乘法深度

$$\mathcal{T}(m, h) = \Omega(m - h) + \Omega(m + h),$$

则由 $\Omega(xy) = \Omega(x) + \Omega(y)$ 得到

$$\boxed{\mathcal{T}(m, h) = \Omega(m^2 - h^2).}$$

所以固定积叶上：

$$\boxed{m^2 - h^2 = M \Rightarrow \mathcal{T}(m, h) = \Omega(M).}$$

这说明：

$$\boxed{extbf{\textit{和、差、积并不是三套关系空间；它们是同一二原子关系平面的三种叶层。}}}$$

进一步，对任意奇整数端点 x, y，定义两族关系壳：

$$L_x^- = \{(m, h) : m - h = x\}, \qquad L_y^+ = \{(m, h) : m + h = y\}.$$

两壳唯一交于

$$\boxed{\left(\frac{x + y}{2}, \frac{y - x}{2}\right).}$$

因此一个二端关系实例等价于一个异向壳的唯一交点。其乘法深度正是

$$\boxed{(\Omega(x), \Omega(y)).}$$

和—差平面还具有两个正交生成方向：

$$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) = \frac{x}{2}(1,-1) + \frac{y}{2}(1,1),$$

且

$$(1,-1) \cdot (1,1) = 0.$$

于是相邻原子的 gap 不只是一维原子序列中的距离，也成为关系网格沿两条生成方向的局部步长。 进一步定义有限 Goldbach 见证场

$$W_K(m) = \{a \in A_K : m - 1 - a \in A_K\}.$$

若

$$T_{K,h} = \#\{b \in A_K : b + h \in A_K\},$$

则存在精确恒等式

$$\boxed{\sum_m |W_K(m) \cap W_K(m+h)| = K\, T_{K,h}.}$$

当 $h = 1$ 时，右侧恰为有限范围内 Twin 对数的 K 倍。更一般地，对有限偏移模板

$$H = \{0, h_1, \dots, h_r\},$$

若

$$T_K(H) = \#\{b : b + h \in A_K \text{ 对所有 } h \in H\},$$

则

$$\boxed{\sum_m \left|\bigcap_{h \in H} W_K(m+h)\right| = K\, T_K(H).}$$

因此，有限 prime constellations 可以精确读取为同一固定和值见证场的多列持续重叠。这里没有把高阶关系替代为平均量；等式两侧仍逐点对应同一批低阶原子见证。

随后，本篇把关系语言推广到任意有限位置映射族

$$f_1, \dots, f_r.$$

一个关系实例写成

$$R_\Theta(x) = \mathcal{B}(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \dots, \boldsymbol{I}(f_r(x;\Theta))),$$

其中 Θ 为参数，x 为锚点，$\mathcal{B}$ 为有限关系谓词。命题再在最外层施加量词：

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\Theta,x}[R_\Theta(x)].}$$

这一规范形覆盖固定和、固定差、仿射、有限模板、等差链、窗口、多项式、指数映射、相邻素数指标与完整因子集合关系。

Green–Tao 等差链作为高阶关系的完整范例得到系统展开。定义

$$C_k(a,h)=\prod_{j=0}^{k-1}\alpha\,(a+jh).$$

它满足同差二原子链拼接

$$C_k(a,h)=\prod_{j=0}^{k-2}E_h\,(a+jh),\qquad E_h(x)=\alpha(x)\alpha(x+h),$$

以及递推

$$C_{k+1}(a,h)=C_k(a,h)\alpha(a+kh).$$

任意 k 项素数等差链都可以沿中心镜像折叠到同一固定和值：

$$p_j+p_{k-1-j}=p_0+p_{k-1}.$$

于是

$$G(N)\geq\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil.$$

等差链还具有精确局部禁止类。对奇素数 q，若 $\rho_q(k,h)$ 表示 q 层禁止的起点余类数，则

$$\rho_q(k,h)=\begin{cases}1, & q\mid h,\\ \min(k,q), & q\nmid h.\end{cases}$$

因此有限素数集合 S 下的允许起点类数为

$$\prod_{q\in S}(\,q-\rho_q(k,h)).$$

特别地，若完整 k 项同差素数链的首项大于 k，则所有奇素数

$$q\leq k$$

都必须整除步长 h。这解释了为什么任意长素数等差链的步长必须不断吸收低阶乘法结构。

本篇最后严格区分八类量词结构：

1. 有限读取；
2. 无限回归；
3. 逐参数全称纤维；
4. 窗口全称；
5. 任意长度；
6. 参数无限；

7. 逐索引全称谓词；

8. 身份块分离。

并建立批量论证的一般形式。一个参数族若存在统一证书映射

$$\mathcal{C}:\Theta \to \mathcal{S},$$

且满足覆盖性与正确性，则同一证明一次覆盖整个参数族。全称与无限的关键不再是增加计算次数，而是建立可重复、可传播或可累计的统一闭合规律。

本篇最终得到：

固定谱 → 低阶关系见证 → 统一关系语法 → 量词分类 → 批量证书.

关键词： 关系切片；和—差—积关系平面；固定积双曲叶；关系壳层；正交生成；低阶见证；固定和值；固定差；有限原子星座；Green–Tao；关系规范形；量词分类；批量论证；全称判定；无限回归

第一部　二原子关系平面与导出几何

第一章　二原子关系平面：和值与差值的共同母体

第一篇已经证明，每个无序二原子关系

$$\{a,b\},\qquad a\le b,$$

可以由和—差坐标无损表示。

定义

$$\boxed{m=a+b+1,\qquad h=b-a.} \tag{1.1}$$

对应普通奇素数

$$p=2a+1,\qquad q=2b+1.$$

则

$$\boxed{p+q=2m,} \tag{1.2}$$

以及

$$\boxed{q-p=2h.} \tag{1.3}$$

反过来，

$$\boxed{p=m-h,\qquad q=m+h.} \tag{1.4}$$

因此只要满足适当的整数格条件，一个关系点

$$(m,h)$$

就唯一恢复原始无序素数对。

定义 1.1　二原子关系平面

定义

$$\boxed{\Gamma=\{(m,h):m-h,\ m+h\ \text{都是奇素数}\}.} \tag{1.5}$$

等价地，用原子坐标写成

$$\boxed{\Gamma=\left\{(m,h):\frac{m-h-1}{2},\frac{m+h-1}{2}\in A\right\}.} \tag{1.6}$$

其中

$$m\ge 3,\qquad h\ge 0.$$

每一个

$$(m,h)\in\Gamma$$

对应唯一无序素数对

$$\boxed{\{m-h,m+h\}.} \tag{1.7}$$

所以 Γ 不是统计图，而是二原子关系本身的无损坐标化。

图 3-01　二原子关系平面

每个关系点 (m,h) 无损对应一对奇素数 {m-h,m+h}。

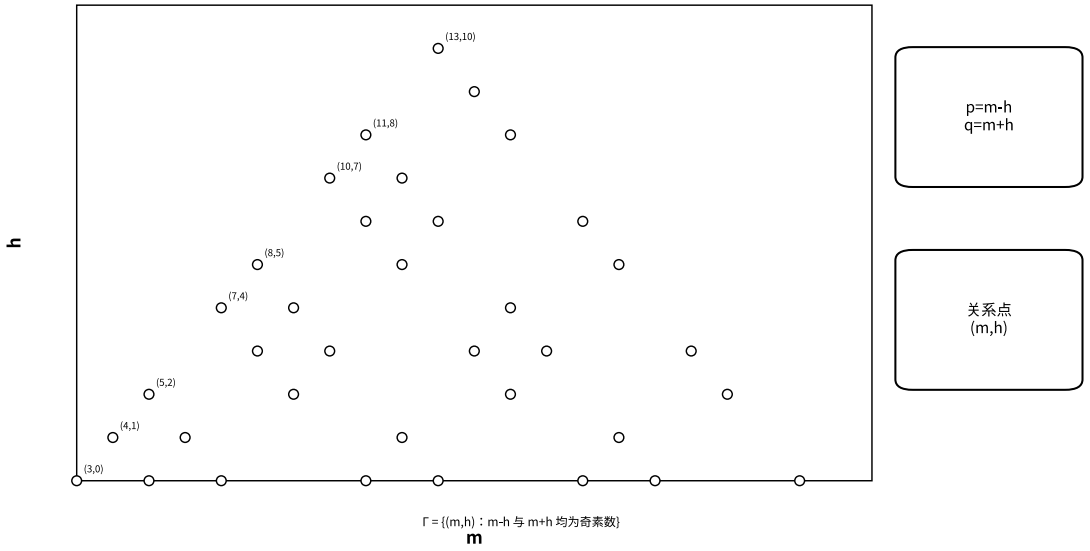


图 3-01　二原子关系平面。 每个关系点 $(m,h) \in \Gamma$ 无损对应唯一无序奇素数对 $\{m-h, m+h\}$。因此 (m,h) 不是统计坐标，而是二原子关系本身的二维坐标化。

第二章　关系平面的三个天然方向

同一个二维关系平面具有三个不同但同等自然的读取方向。

2.1　固定和值：竖直切片

固定 m，定义

$$\boxed{\Gamma_m = \{h: (m,h) \in \Gamma\}.} \tag{2.1}$$

每一个

$$h \in \Gamma_m$$

给出一组无序奇素数表示

$$2m = (m-h) + (m+h).$$

因此定义固定和值重数

$$\boxed{G(2m) = |\Gamma_m|.} \tag{2.2}$$

于是二元 Goldbach 的局部关系形式为：

$$\boxed{\Gamma_m \neq \varnothing.} \tag{2.3}$$

它的全称形式则是：

$$\boxed{\forall m \geq 3, \qquad \Gamma_m \neq \varnothing.} \tag{2.4}$$

这里最重要的是：固定和值不是重新创造一组关系，只是读取关系平面的一条竖直纤维。

2.2　固定差：水平切片

固定 h，定义

$$\boxed{\Gamma^{[h]} = \{m: (m,h) \in \Gamma\}.} \tag{2.5}$$

每一个

$$m \in \Gamma^{[h]}$$

对应一对差值为

$$2h$$

的奇素数。

定义

$$\boxed{T(2h) = |\Gamma^{[h]}|.} \tag{2.6}$$

当

$$h = 1$$

时，

$$q - p = 2,$$

所以 Twin 关系就是水平线

$$h = 1$$

上的关系点。

无限 Twin 命题具有精确形式：

$$\boxed{|\Gamma^{[1]}| = \infty.} \tag{2.7}$$

因此：

$$\boxed{\text{Goldbach 读取竖直纤维；　　Twin 读取单位水平纤维。}} \tag{2.8}$$

2.3 固定较大原子：斜向关系星

固定较大素数

$$q = 2b + 1.$$

它与任一历史素数

$$p = 2a + 1, \qquad a \le b,$$

形成关系点

$$m = a + b + 1, \qquad h = b - a.$$

于是

$$m + h = 2b + 1 = q.$$

所以同一个新素数与全部历史素数形成的关系点全部落在斜线

$$\boxed{m + h = q.} \tag{2.9}$$

如果 $q = p_k$ 是第 k 个奇素数，那么这条斜向关系星恰有 k 个点。

因此：

$$\boxed{\text{一个新原子在和—差关系平面上生成一条斜向关系星。}} \tag{2.10}$$

这 k 个点同时携带：

- k 个固定和值关系；
- $k - 1$ 个正差值关系；
- 一个自身配对关系。

它们不是三个不同事件，而是同一批原子对的三个读法。

图 3-02　和值 / 差值 / 关系星三方向图

关系平面坐标 (m, h) 满足 $p = m - h,\ q = m + h$。固定 m、固定 h、固定较大素数 $q = m + h$ 是同一平面的三种读取。

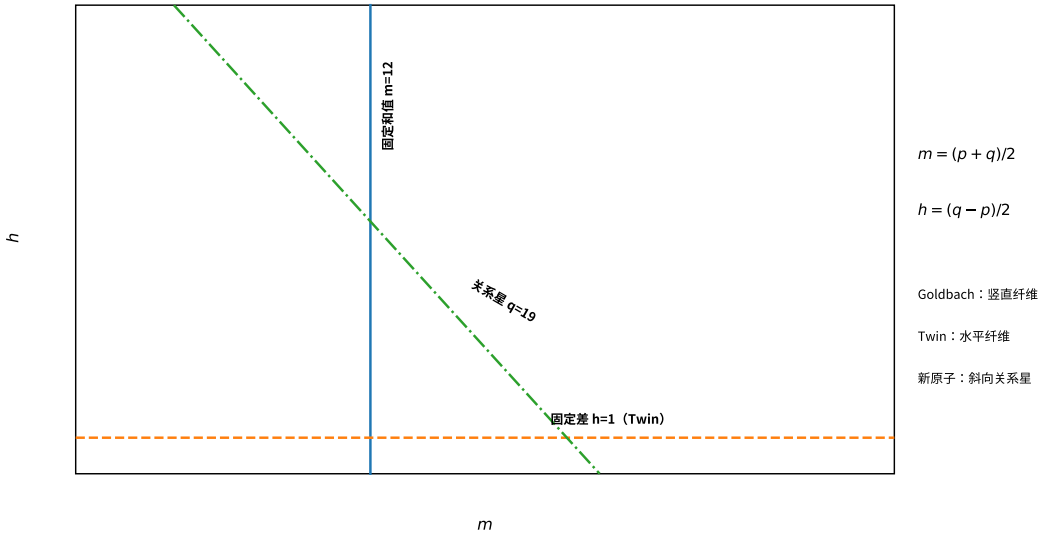


图 3-02　和值 / 差值 / 关系星三方向图。 在和—差关系平面 (m, h) 中，固定 m 是 Goldbach 型固定和值竖直纤维，固定 h 是固定差水平纤维，而固定较大素数 $q = m + h$ 形成斜向关系星。

2.4　固定积：同一平面的双曲叶

和值和差值并没有用尽二原子关系平面的信息。

由

$$p = m - h, \qquad q = m + h,$$

立即得到

$$\boxed{pq = (m - h)(m + h) = m^2 - h^2.} \tag{2.11}$$

因此固定乘积

$$pq = M$$

在 (m, h) 平面上对应

$$\boxed{m^2 - h^2 = M.} \tag{2.12}$$

这是一族双曲叶。

固定和值读取

$$m = \text{常数},$$

固定差值读取

$$h = \text{常数},$$

固定积读取

$$m^2 - h^2 = \text{常数}.$$

所以：

和、差、积并不是三套关系空间； 它们是同一关系平面的三种叶层。

(2.13)

这一点很重要。

和值是线性组合，

差值是另一条线性组合，

积值则把两个线性坐标重新合成为乘法关系。

三者没有改变端点，也没有改变端点身份；它们只从同一个无损关系点读取不同的不变量。

图 3-03　固定积的双曲叶

固定和值、固定差与固定积是同一 (m,h) 平面的不同叶层。

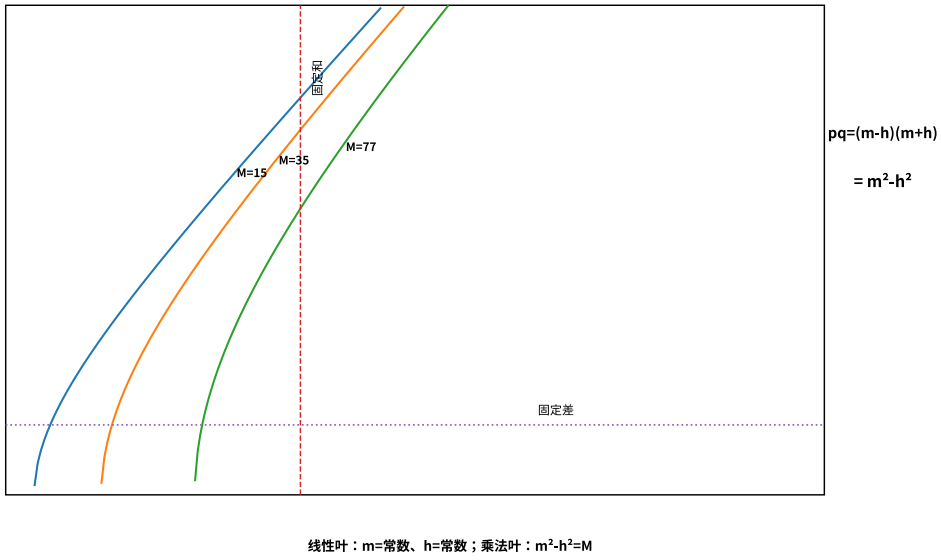


图 3-03　固定积的双曲叶。 由 $p = m - h, q = m + h$ 得 $pq = m^2 - h^2$。因此固定和值 $m = \text{const}$、固定差 $h = \text{const}$ 与固定积 $m^2 - h^2 = M$ 是同一关系平面的三种叶层，而不是三套不同的对象空间。

2.5　总乘法深度恒等式

对任意正整数 n，记

$$\Omega(n)$$

为按重数计的素因子总数。

定义关系点 (m,h) 的总乘法深度

$$\boxed{\mathcal{T}(m,h)=\Omega(m-h)+\Omega(m+h).} \tag{2.14}$$

由于

$$\Omega(xy)=\Omega(x)+\Omega(y),$$

有：

定理 2.1　总乘法深度恒等式

$$\boxed{\mathcal{T}(m,h)=\Omega(m^2-h^2).} \tag{2.15}$$

证明

由

$$m^2-h^2=(m-h)(m+h),$$

以及 Ω 对乘法的可加性，

$$\begin{aligned}\Omega(m^2-h^2)&=\Omega((m-h)(m+h))\\&=\Omega(m-h)+\Omega(m+h)\\&=\mathcal{T}(m,h).\end{aligned}$$

证毕。

推论 2.2　固定积叶上的深度守恒

若

$$m^2-h^2=M,$$

则

$$\boxed{\mathcal{T}(m,h)=\Omega(M).} \tag{2.16}$$

因此同一固定积双曲叶上的全部关系点具有相同的**总乘法深度**。

这里相同的是两个端点深度之和，不要求两个端点各自深度相同。

例如：

$$\Omega(m-h)=1,\qquad \Omega(m+h)=3,$$

与

$$\Omega(m-h)=2,\qquad \Omega(m+h)=2$$

可以具有相同总深度 4，但它们显然属于不同的关系身份。

所以总深度是一个真实不变量，却不能替代端点级身份。

这也再次体现本书的基本纪律：

> **不变量可以压缩关系； 压缩以后仍要知道哪些信息被保存、哪些信息没有被保存。**

(2.17)

图 3-04　固定积叶上的总乘法深度守恒

同一固定积叶上，两个端点的乘法深度之和恒等于乘积的乘法深度。

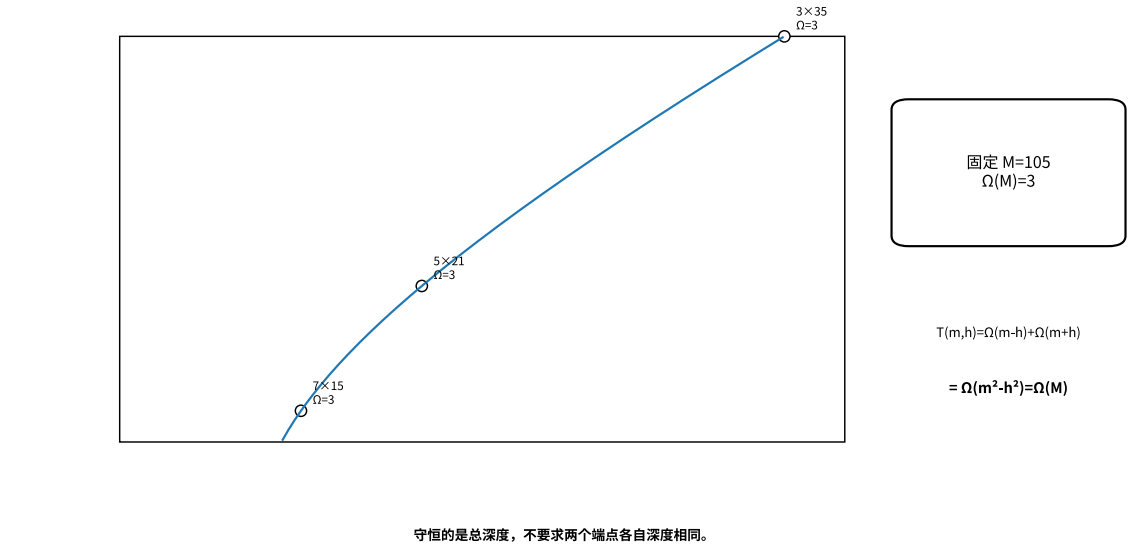


图 3-04　固定积叶上的总乘法深度守恒。 总乘法深度 $\mathcal{T}(m,h)=\Omega(m-h)+\Omega(m+h)$ 满足 $\mathcal{T}(m,h)=\Omega(m^2-h^2)$。因此在固定积叶 $m^2-h^2=M$ 上，总深度恒为 $\Omega(M)$；守恒的是两个端点深度之和，而不是每个端点深度分别不变。

第三章　壳层交叉、正交生成与反射—平移

和值、差值和积值说明同一个关系点可以沿不同叶层读取。

现在反过来问：

> 给定两个端点，它们怎样在关系平面中生成唯一的关系点？

答案由两族关系壳给出。

3.1　两族端点壳

对奇整数 $x \geq 3$，定义左端点壳

$$\boxed{L_x^- = \{(m,h): m - h = x\}.} \tag{3.1}$$

对奇整数 $y \geq 3$，定义右端点壳

$$\boxed{L_y^+ = \{(m,h): m + h = y\}.} \tag{3.2}$$

L_x^- 保持左端点不变；

L_y^+ 保持右端点不变。

因此一个关系点同时属于一条负向壳和一条正向壳。

定理 3.1　壳交点双射

若 x, y 为同奇偶整数，则

$$\boxed{L_x^- \cap L_y^+ = \left\{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)\right\}.} \tag{3.3}$$

证明

若

$$(m,h) \in L_x^- \cap L_y^+,$$

则

$$m - h = x, \qquad m + h = y.$$

两式相加、相减得到

$$m = \frac{x+y}{2}, \qquad h = \frac{y-x}{2}.$$

所以交点至多一个。

反过来，把这一对数代回：

$$m - h = x, \qquad m + h = y,$$

故该点同时属于两壳。

证毕。

因此：

$$\boxed{\text{二端关系实例} \leftrightarrow \text{异向壳唯一交点.}} \tag{3.4}$$

这给关系矩阵一个直接的二维几何实现。

图 3-05　壳交点双射

固定左端点与固定右端点的两族壳线恰有唯一交点；该交点就是一个关系实例。

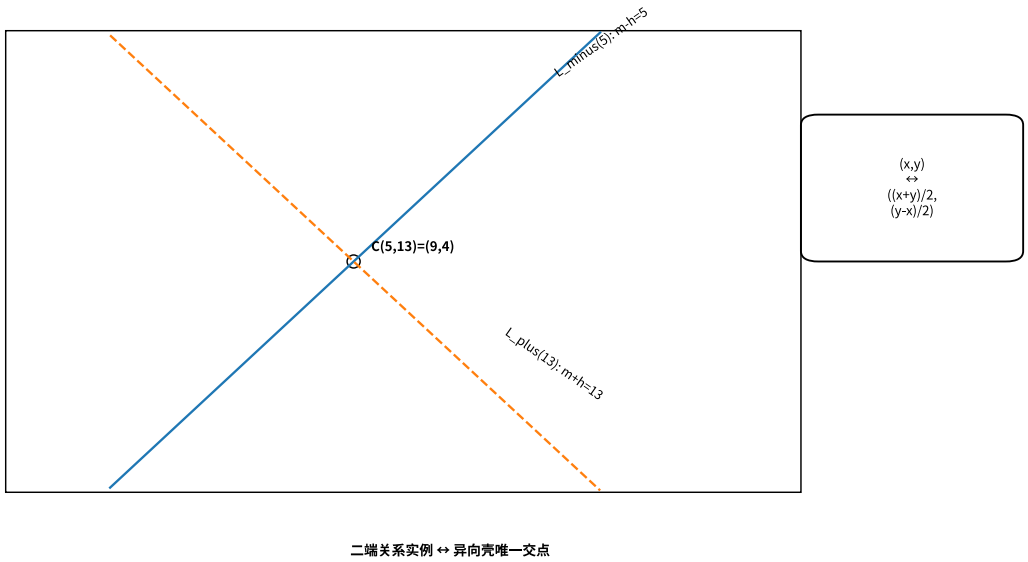


图 3-05　壳交点双射。 固定左端点 x 的壳 L_x^- 与固定右端点 y 的壳 L_y^+ 恰有唯一交点 $C(x,y)=((x+y)/2,(y-x)/2)$。因此二端关系实例与异向壳唯一交点一一对应。

3.2　壳深度因子化

定义端点深度向量

$$\boxed{\Delta(C(x,y))=(\Omega(x),\Omega(y)),} \tag{3.5}$$

其中

$$C(x,y)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{y-x}{2}\right).$$

于是：

- L_x^- 的第一深度分量固定为 $\Omega(x)$；
- L_y^+ 的第二深度分量固定为 $\Omega(y)$。

特别地，若

$$x,y\in\mathbb{P}_{\text{odd}},$$

则

$$\boxed{\Delta(C(x,y)) = (1,1).} \tag{3.6}$$

因此二原子关系平面恰好是全部深度 $(1,1)$ 壳交点的集合。

3.3 新原子出生的壳层几何

设已有 K 个原子，随后一次纳入 M 个新原子。

新增无序关系分成两类。

第一类是旧—新关系：

$$K \times M.$$

它们在关系矩阵中形成一个矩形区。

第二类是新—新关系，包括自身配对：

$$\frac{M(M+1)}{2}.$$

它们形成一个上三角区。

因此新增关系总数为

$$\boxed{KM + \frac{M(M+1)}{2}.} \tag{3.7}$$

几何上：

$$\boxed{\text{新增关系} = \text{旧—新矩形} + \text{新—新三角区}.} \tag{3.8}$$

每一个新关系又恰好对应一对新出现的异向壳交点。

所以：

$$\boxed{\text{关系矩阵增长} \Leftrightarrow \text{壳层交叉增长}.} \tag{3.9}$$

“一个新原子出生一整行关系”与“一个新壳加入并与历史异向壳逐一相交”，是同一件事的矩阵语言与几何语言。

3.4 正交生成方向

壳交点坐标可以写成

$$\boxed{C(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) = \frac{x}{2}(1,-1) + \frac{y}{2}(1,1).} \tag{3.10}$$

两条生成方向满足

$$\boxed{(1,-1) \cdot (1,1) = 0.} \tag{3.11}$$

所以：

$$\boxed{\text{左右端点沿两条正交方向生成关系平面。}} \tag{3.12}$$

若左端点增加 δx，关系点沿

$$(1,-1)$$

方向移动

$$\frac{\delta x}{2}.$$

若右端点增加 δy，关系点沿

$$(1,1)$$

方向移动

$$\frac{\delta y}{2}.$$

这使端点的局部间隔直接成为关系平面的局部几何步长。

3.5 Prime gap 是关系网格的局部度量

设相邻奇素数为

$$p_n < p_{n+1},$$

prime gap 为

$$g_n = p_{n+1} - p_n.$$

若固定另一个端点 y，把左端点从 p_n 改为 p_{n+1}，关系点的位移为

$$\boxed{\frac{g_n}{2}(1,-1).} \tag{3.13}$$

若改变右端点，则位移为

$$\boxed{\frac{g_n}{2}(1,1).} \tag{3.14}$$

因此：

prime gap 不只是原子序列中的一维差值， 也是关系网格沿两条正交生成方向的局部度量。

(3.15)

这也解释了为什么 prime gap 会同时进入：

- 固定差关系；
- 关系行平移；
- 平方视界宽度；
- 相邻素数窗口；
- 关系网格的局部尺度。

它不是外加的坐标标签，而是原子排列本身在关系几何中的步长。

3.6 反射与平移：同一个原子集合的两种自交

设全部奇素数原子坐标组成

$$A.$$

固定和值关系可以写成反射自交。

对 $m \geq 3$，定义反射

$$\boxed{\rho_m(a) = m - 1 - a.} \tag{3.16}$$

则固定和值见证集合为

$$\boxed{A \cap \rho_m(A).} \tag{3.17}$$

Goldbach 的全称形式就是

$$\boxed{\forall m \geq 3, \qquad A \cap \rho_m(A) \neq \varnothing.} \tag{3.18}$$

固定差关系可以写成平移自交。

定义

$$\boxed{\tau_h(a) = a + h.} \tag{3.19}$$

则固定差 $2h$ 的见证集合为

$$\boxed{A \cap (A - h).} \tag{3.20}$$

Twin 对应

$$h = 1,$$

即

$$\boxed{\#(A \cap (A - 1)) = \infty.} \tag{3.21}$$

所以：

$$\boxed{\text{乘法生成一个刚性的原子集合 } A\text{；加法和差值是 } A \text{ 在不同变换下的自交。}} \tag{3.22}$$

这句话同时保留了两层事实：

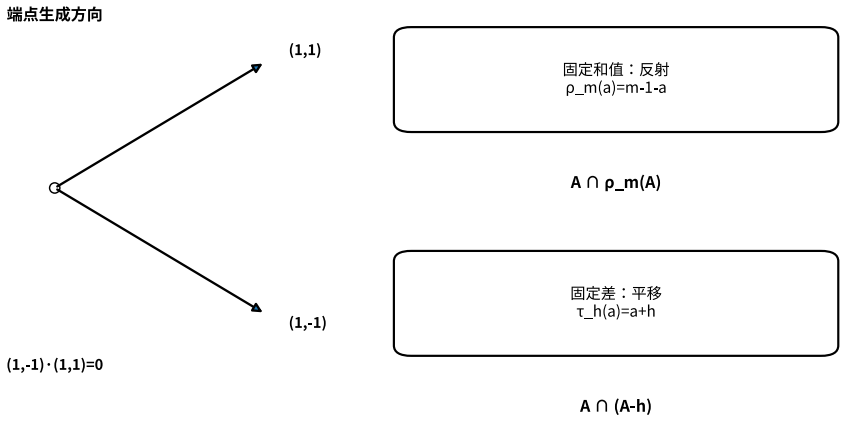
- 原子身份来自固定乘法结构；
- 关系真假来自原子集合与其变换副本的具体交叉。

因此固定谱没有消解关系。

它只是让关系可以被精确写成自交。

图 3-06　正交生成与反射—平移自交

端点沿两条正交方向生成关系平面；固定和与固定差分别是原子集合的反射自交与平移自交。



Goldbach 与 Twin 都是同一刚性原子集合 A 的不同自交读出。

图 3-06　正交生成与反射—平移自交。 左右端点沿 $(1,-1)$ 与 $(1,1)$ 两条正交方向生成关系平面；固定和值是原子集合 A 与其反射 $\rho_m(A)$ 的自交，固定差是 A 与其平移副本的自交。因此 Goldbach 与 Twin 是同一刚性原子集合在不同变换下的关系读出。

第四章　低阶见证纪律：统一不能以丢失关系为代价

一个高阶统计量如果不能恢复目标的低阶见证，就不能替代目标关系。

这条纪律在固定和值问题中尤其清楚。

Goldbach 最低阶见证是某个具体原子

$$a \in A$$

同时满足

$$m - 1 - a \in A.$$

所以：

$$\boxed{a \in A \quad \text{且} \quad m - 1 - a \in A} \tag{4.1}$$

才是一个完整关系见证。

无论引入：

- 总关系数；
- 平均密度；
- 模余类分布；
- 卷积均值；
- 频谱；
- 高阶交叠；

只要最终要推出固定和值关系，都必须能够回到这样的具体见证。

因此：

$$\boxed{\text{任何高阶量都不能离开低阶见证。}} \tag{4.2}$$

这里的“高阶”不是禁止使用高维结构。

它只规定：

> 高维结构必须与目标的最低阶关系之间保留明确、可证明、无信息损失的接口。

第二部　低阶见证场与有限原子星座

第五章　有限 Goldbach 见证场

取前 K 个原子

$$A_K = \{a_1, \dots, a_K\}.$$

对整数 m，定义有限固定和值见证集

$$\boxed{W_K(m) = \{a \in A_K : m - 1 - a \in A_K\}.} \tag{5.1}$$

于是

$$|W_K(m)|$$

就是前 K 个原子对目标 m 的有序左端见证数。

若按无序关系计数，再作对称折叠即可。

关键不是计数本身，而是：

$$W_K(m)$$

保留了每一个具体左端原子。

因此不同目标列之间可以直接比较“同一个左端见证是否持续存在”。

图 3-07　有限 Goldbach 见证场

对有限原子集 A_K，每个固定和值 m 都有一列见证 W_K(m)。

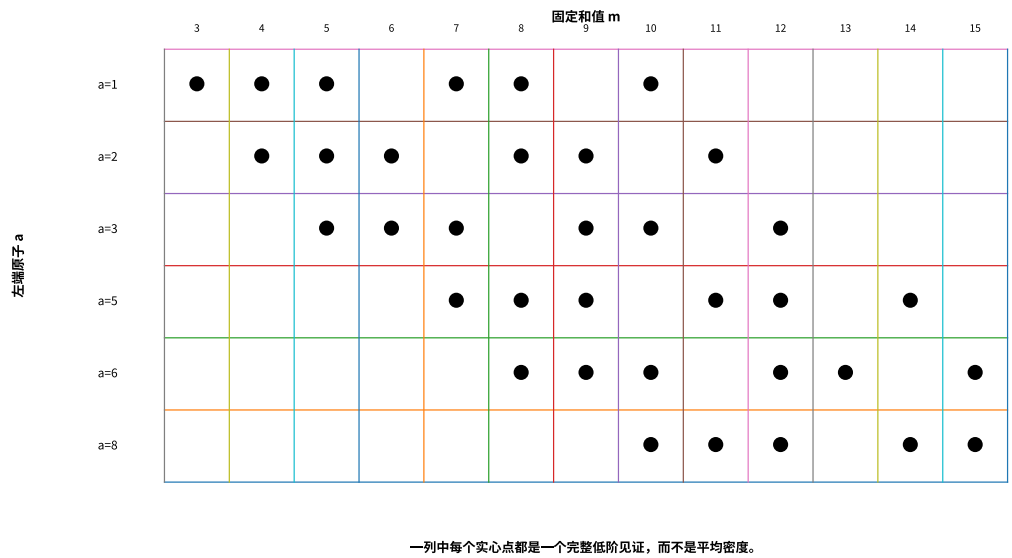


图 3-07　有限 Goldbach 见证场。 对有限原子集 A_K，每个固定和值 m 都有见证列 $W_K(m) = \{a \in A_K : m - 1 - a \in A_K\}$。图中的每个实心点都代表一个具体低阶原子见证，而不是平均密度或标量近似。

第六章　Twin 是固定和值见证的相邻列持续

比较相邻两列

$$W_K(m)$$

和

$$W_K(m+1).$$

若

$$a \in W_K(m) \cap W_K(m+1),$$

则

$$b = m - 1 - a \in A_K,$$

同时

$$b + 1 = m - a \in A_K.$$

对应普通奇素数：

$$2b + 1, \qquad 2b + 3,$$

二者相差 2。

反之，若

$$b, b + 1 \in A_K$$

形成 Twin 原子对，再任取

$$a \in A_K,$$

令

$$m = a + b + 1,$$

则

$$a \in W_K(m) \cap W_K(m+1).$$

因此：

同一个固定和值左端见证从 $2m$ 持续到 $2m+2$ ⇔ 它的两个右端伙伴是一对 Twin 素数。 (6.1)

也可以压缩成：

Twin = 固定和值见证在相邻偶数之间的持续性。 (6.2)

图 3-08　Twin 是固定和值见证的相邻列持续

同一个左端见证同时出现在 W_k(m) 与 W_k(m+1) 中，当且仅当两列在曲线条件下形成 Twin 原子对。

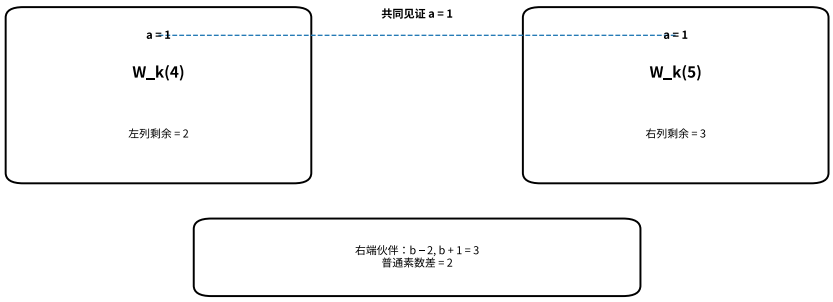


图 3-08　Twin 是固定和值见证的相邻列持续。 若同一个左端见证 a 同时属于 $W_K(m)$ 与 $W_K(m+1)$，则其右端伙伴分别为 b 与 $b+1$，对应普通素数相差 2。反向构造同样成立，因此 Twin 可精确读取为固定和值见证在相邻偶数列之间的持续。

第七章　固定差计数与见证持续的精确恒等式

定义有限原子差计数

$$\boxed{T_{K,h} = \#\{b \in A_K : b + h \in A_K\}.} \tag{7.1}$$

它统计原子坐标中间距为 h 的原子对；对应普通素数差为

$$2h.$$

再定义见证重叠总量

$$\boxed{\Omega_{K,h} = \sum_{m} |\, W_K(m) \cap W_K(m+h)|.} \tag{7.2}$$

定理 7.1　见证持续恒等式

对任意

$$h \geq 0,$$

有

$$\boxed{\Omega_{K,h} = K\, T_{K,h}.} \tag{7.3}$$

证明

若

$$a \in W_K(m) \cap W_K(m+h),$$

令

$$b = m - 1 - a.$$

则

$$a \in A_K, \qquad b \in A_K, \qquad b + h \in A_K.$$

因此左侧每一个计数对象唯一对应一个二元组

$$(a, b),$$

其中

$$a \in A_K, \qquad b, b + h \in A_K.$$

反过来，任取

$$a \in A_K$$

和一个差为 h 的原子对

$$b, b + h \in A_K,$$

唯一令

$$m = a + b + 1,$$

便有

$$a \in W_K(m) \cap W_K(m+h).$$

因此左侧对象与

$$A_K \times \{b \in A_K : b + h \in A_K\}$$

一一对应。

前一因子有 K 个元素，后一因子有 $T_{K,h}$ 个元素。

故

$$\Omega_{K,h} = K\,T_{K,h}.$$

证毕。

推论 7.2　Twin 有限计数恒等式

取

$$h = 1,$$

得到

$$\boxed{\sum_m |\,W_K(m) \cap W_K(m+1)| = K\,T_{K,1}.} \tag{7.4}$$

从而

$$\boxed{T_{K,1} = \frac{1}{K}\sum_m |\,W_K(m) \cap W_K(m+1)|.} \tag{7.5}$$

因此：

有限范围内的 Twin 素数对数， 恰好等于固定和值见证场相邻列重叠总量除以原子数。

(7.6)

这是一个有限精确恒等式，不依赖概率或平均模型。

第八章　多列持续与一般 prime constellations

取有限偏移集合

$$\boxed{H = \{0, h_1, \dots, h_r\}.} \tag{8.1}$$

定义有限 constellation 计数

$$\boxed{T_K(H) = \#\{b : b + h \in A_K \text{ 对所有 } h \in H\}.} \tag{8.2}$$

则可以同时考察固定和值见证场的多列交叠：

$$\bigcap_{h \in H} W_K(m + h).$$

定理 8.1　多列持续恒等式

$$\boxed{\sum_m \left| \bigcap_{h \in H} W_K(m + h) \right| = K\, T_K(H).} \tag{8.3}$$

证明

若

$$a \in \bigcap_{h \in H} W_K(m + h),$$

令

$$b = m - 1 - a.$$

由于 $0 \in H$，有

$$b \in A_K.$$

对每个

$$h \in H,$$

由

$$a \in W_K(m + h)$$

得到

$$m + h - 1 - a = b + h \in A_K.$$

因此左侧对象唯一对应

$$a \in A_K$$

以及一个满足

$$b + h \in A_K \quad (h \in H)$$

的 constellation 起点 b。

反向构造与定理 7.1 相同。

故对象数为

$$K\,T_K(H).$$

证毕。

于是：

有限 prime constellations　就是固定和值见证场的多列持续重叠。 (8.4)

特殊情形：

$$H = \{0\}$$

给出单列见证；

$$H = \{0,1\}$$

给出 Twin；

更一般的 H 给出相应的有限素数模板。

这说明关系母体不只把 Goldbach 与 Twin 放到同一坐标中，还给出二者之间的精确定量接口。

图 3-09　多列持续与一般 prime constellations

有限偏移模板 H={0,h1,⋯,hr} 对应多个固定和值见证列的同步交叠。

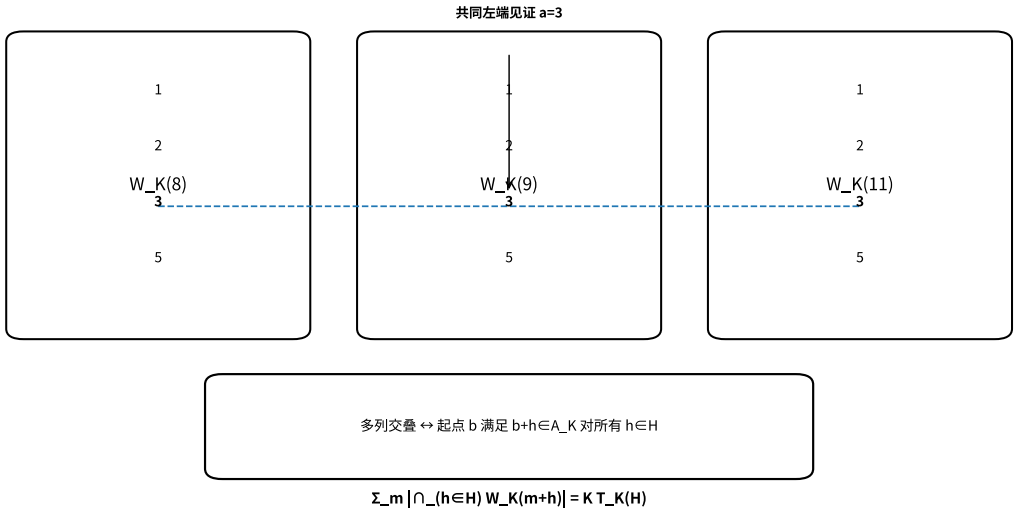


图 3-09　多列持续与一般 prime constellations。 对有限偏移模板 $H = \{0, h_1, \dots, h_r\}$，一般 prime constellation 对应多个固定和值见证列 $W_K(m+h)$ 的同步交叠，并满足精确恒等式 $\sum_m |\bigcap_{h\in H} W_K(m+h)| = K\,T_K(H)$。

第九章　时间方向与空间方向

关系场同时具有两个彼此独立的自然方向。

第一篇已经给出原子出生后的关系行更新。

设

$$A_K \to A_{K+1}$$

加入一个新原子。

固定和值重数场随 K 更新，这是关系场的**生成方向**。

而定理 7.1 与定理 8.1 比较不同目标列之间的重叠，这是关系场的**切片方向**。

因此可以把关系场理解为三坐标结构：

$$\begin{array}{|ll|} \hline K & : \text{ 原子生成与历史增长,} \\ m & : \text{ 固定和值目标,} \\ h & : \text{ 列间距与固定差.} \\ \hline \end{array} \tag{9.1}$$

一个新原子沿 K 方向进入；

Goldbach 沿 m 方向读取；

prime gaps 沿 h 方向读取。

这三种信息属于同一个原子关系场，而不是三套不同对象。

第三部　一般关系语言与关系规范形

第十章　一般关系切片的定义

二原子关系平面给出了最直观的切片模型。

为了覆盖更一般问题，需要把“固定一条坐标线”推广到任意有限位置映射。

定义 10.1　关系参数

用

$$\Theta$$

表示一组固定关系参数。

它可以是：

- 固定和值 N；
- 固定差 d；
- 仿射系数 (A,B)；
- 有限偏移模板 H；
- 等差长度与步长 (k,d)；
- 多项式组 $(f_1,\dots,f_r)$；
- 窗口索引 n；
- 两个整数块的起点 (x,y)。

定义 10.2　锚点

对给定参数 Θ，设

$$x \in X_\Theta$$

为关系锚点。

锚点是生成一个具体关系实例所需的自由位置。

例如：

- Goldbach 中可取 $x=p$；
- 固定差中可取 $x=p$；
- prime tuple 中可取 $x=n$；
- Green–Tao 中可取 $x=a$；
- 多项式关系中可取 $x=n$。

定义 10.3　位置映射

给定有限个映射

$$\boxed{f_i: X_\Theta \times \Theta \to \mathbb{Z}, \qquad 1 \le i \le r.} \tag{10.1}$$

称

$$\boldsymbol{f}_\Theta = (f_1, \dots, f_r)$$

为该关系的**位置映射族**。

它回答：

> 一个关系实例到底读取固定谱上的哪些整数位置？

定义 10.4　局部关系谓词

给定位置身份

$$\boldsymbol{I}(f_i(x;\Theta)),$$

定义有限谓词

$$\boxed{\mathcal{B}_\Theta}$$

作用于这些身份及必要的数值关系。

局部关系写成

$$\boxed{R_\Theta(x) = \mathcal{B}_\Theta(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \dots, \boldsymbol{I}(f_r(x;\Theta)))}. \tag{10.2}$$

若只要求所有端点均为素数，则

$$\boxed{R_\Theta(x) = \prod_{i=1}^{r} \alpha\,(f_i(x;\Theta))}. \tag{10.3}$$

第十一章　统一关系规范形

一个完整命题还必须规定外层量词。

因此定义：

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\Theta,x}[R_\Theta(x)].} \tag{11.1}$$

其中：

- $\boldsymbol{I}$：固定算术身份；
- f_i：关系位置；
- $\mathcal{B}$：局部谓词；
- $\mathcal{Q}$：外层量词。

于是得到全书的关系规范形：

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\Theta,x}[\mathcal{B}_\Theta(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)),\dots,\boldsymbol{I}(f_r(x;\Theta)))].} \tag{11.2}$$

这条公式把关系问题分成三个严格层次：

$$\boxed{\text{位置} \quad \rightarrow \quad \text{局部关系} \quad \rightarrow \quad \text{全局量词}.} \tag{11.3}$$

图 3-10　统一关系规范形：位置 → 局部关系 → 全局量词
第三篇把经典关系问题编译为同一关系语法。

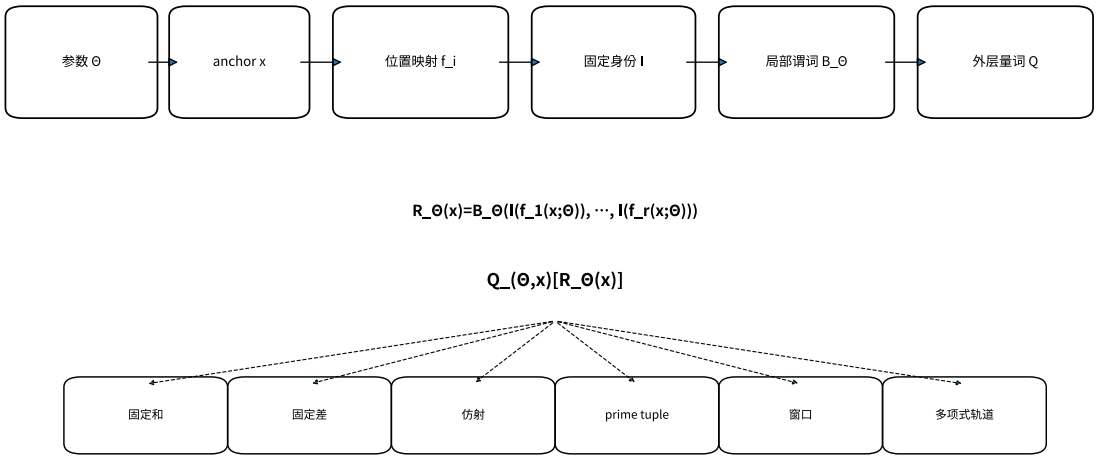


图 3-10　统一关系规范形：位置 → 局部关系 → 全局量词。 完整命题被分解为参数 Θ、锚点 x、位置映射 f_i、固定身份读取 $\boldsymbol{I}$、局部谓词 $\mathcal{B}$ 与外层量词 $\mathcal{Q}$。固定和、固定差、仿射、prime tuple、窗口与多项式轨道都只是这一规范形的不同参数化。

第十二章　固定和、固定差与连续固定差

12.1　固定和

给定偶数 N：

$$f_1(p;N)=p,\qquad f_2(p;N)=N-p.$$

定义

$$\boxed{R_N(p)=\alpha(p)\alpha(N-p).} \tag{12.1}$$

局部关系只回答：

> 这个 p 是否构成一个固定和值素数对？

全称命题则是：

$$\boxed{\forall N\in 2\mathbb{Z}_{\geq 4},\quad \exists p: R_N(p)=1.} \tag{12.2}$$

12.2　固定差

给定偶差 d：

$$f_1(p)=p,\qquad f_2(p)=p+d.$$

定义

$$\boxed{W_d(p)=\alpha(p)\alpha(p+d).} \tag{12.3}$$

Twin 对应

$$d=2.$$

12.3　连续固定差

如果还要求 $p,p+d$ 是相邻素数，则必须保存开区间中的素数空读：

$$\boxed{E_d(p)=\prod_{p<n<p+d}(1-\alpha(n)).} \tag{12.4}$$

于是连续固定差谓词为

$$\boxed{P_d(p)=\alpha(p)\alpha(p+d)E_d(p).} \tag{12.5}$$

这说明：

$$\boxed{\text{固定差}\neq\text{连续固定差}.} \tag{12.6}$$

两者读取同一固定谱，却具有不同局部关系谓词。

第十三章　加权反射与仿射关系

13.1　Lemoine / Lévy 型加权反射

给定奇数 N，要求

$$N = p + 2q.$$

位置映射可以写成：

$$f_1(p;N) = p,$$

$$f_2(p;N) = \frac{N-p}{2}.$$

局部谓词为

$$\boxed{L_N(p) = \alpha(p)\alpha\left(\frac{N-p}{2}\right)} \tag{13.1}$$

并同时要求

$$N - p$$

为正偶数。

这里 Goldbach 的普通反射

$$p \mapsto N - p$$

被替换成加权反射

$$p \mapsto \frac{N-p}{2}.$$

13.2　一般仿射关系

给定整数 A, B，定义

$$\boxed{f_{A,B}(p) = Ap + B.} \tag{13.2}$$

于是

$$\boxed{R_{A,B}(p) = \alpha(p)\alpha(Ap+B).} \tag{13.3}$$

Sophie Germain 关系对应

$$A = 2, \qquad B = 1.$$

因此：

$$\boxed{SG(p) = \alpha(p)\alpha(2p+1).} \tag{13.4}$$

仿射关系说明“固定和”“固定差”并不是关系语言的边界。

第十四章　有限模板与 prime tuples

给定有限偏移集合

$$\boxed{H = \{h_1, \dots, h_k\}.} \tag{14.1}$$

定义位置映射

$$f_j(n) = n + h_j.$$

对应全原子谓词

$$\boxed{R_H(n) = \prod_{j=1}^{k} \alpha\,(n + h_j).} \tag{14.2}$$

只要

$$R_H(n) = 1,$$

就说明整个模板

$$n + H$$

同时落在素数谱上。

Twin 对应

$$H = \{0,2\}.$$

一般 prime constellation 都属于这一形式。

因此：

> **预置猜想名称不是关系语言的边界； 有限模板本身才是数学对象。**

(14.3)

第四部　高阶仿射组织与等差原子链

第十五章　Green–Tao 等差原子链

有限模板中一个特别重要的子族是等差模板。

在原子坐标中，对

$$k \geq 2, \qquad a \geq 1, \qquad h \geq 1,$$

定义有序同差关系对象

$$\boxed{\mathfrak{A}_k(a,h) = (a, a+h, \dots, a+(k-1)h).} \tag{15.1}$$

定义完整身份读数

$$\boxed{C_k(a,h) = \prod_{j=0}^{k-1} \alpha\,(a+jh).} \tag{15.2}$$

当且仅当全部 k 个端点都是原子时，

$$C_k(a,h) = 1.$$

普通素数坐标为

$$\Phi(a+jh) = 2a + 1 + 2jh.$$

因此对应素数公差为

$$2h.$$

这里整条链被视为一个**单组织关系**，而不是 k 个互不关联的素数事件。

图 3-11　仿射关系与等差原子链

固定和、固定差只是仿射位置映射的特例；Green–Tao 等差链是高阶同差模板。

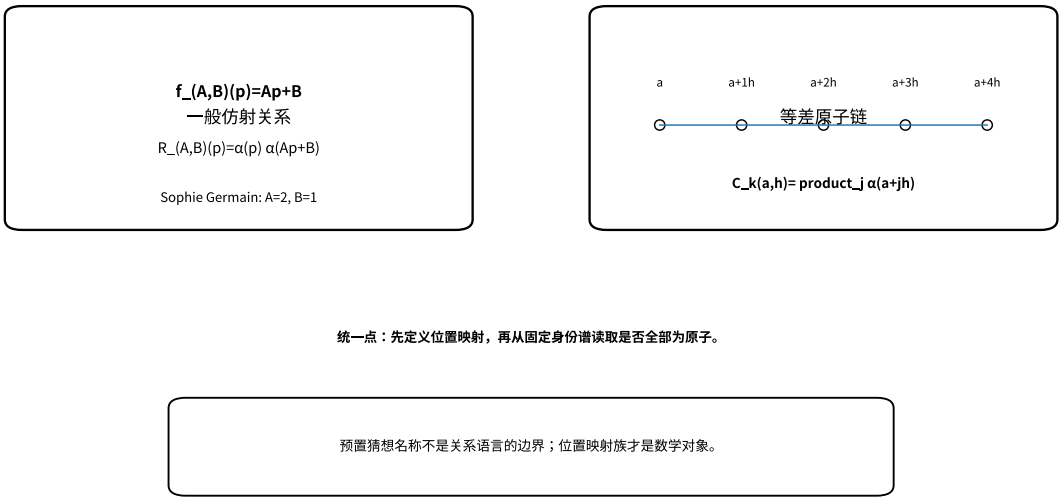


图 3-11　仿射关系与等差原子链。 一般仿射关系通过位置映射 $f_{A,B}(p) = Ap + B$ 读取，例如 Sophie Germain 对应 $A = 2, B = 1$。Green–Tao 型等差原子链则由 $a, a + h, \ldots, a + (k - 1)h$ 组成。两者共同说明：预置猜想名称不是关系语言的边界，位置映射族本身才是数学对象。

第十六章　等差链由同差二原子关系连续拼接

定义同差二原子关系

$$\boxed{E_h(x) = \alpha(x)\alpha(x+h).} \tag{16.1}$$

定理 16.1　同差链拼接定理

对所有

$$k \geq 2,$$

有

$$\boxed{C_k(a,h) = \prod_{j=0}^{k-2} E_h\,(a+jh).} \tag{16.2}$$

证明

右侧展开为

$$\alpha(a)\alpha(a+h)\cdot\alpha(a+h)\alpha(a+2h)\cdots\alpha(a+(k-2)h)\alpha(a+(k-1)h).$$

中间每个身份出现两次。

由于

$$\alpha(n)^2 = \alpha(n),$$

乘积恰化为

$$\prod_{j=0}^{k-1} \alpha\,(a+jh) = C_k(a,h).$$

证毕。

推论 16.2　链长递推

$$\boxed{C_{k+1}(a,h) = C_k(a,h)\,\alpha(a+kh).} \tag{16.3}$$

因此等差链每增加一项，只增加一个新的末端原子条件。

第十七章　三端链与固定和值镜像

当

$$k = 3$$

时，

$$C_3(a,h) = 1$$

给出三个素数

$$p_0,\quad p_1,\quad p_2$$

满足

$$p_1 - p_0 = p_2 - p_1.$$

因此：

$$\boxed{p_0 + p_2 = 2p_1.} \tag{17.1}$$

定理 17.1　三端同差链的固定和值折叠

若

$$C_3(a,h) = 1,$$

则同一个偶数

$$2p_1$$

具有两种由该链给出的无序素数表示：

$$\boxed{p_0 + p_2 = p_1 + p_1 = 2p_1.} \tag{17.2}$$

反过来，若三个奇素数

$$p_0 < p_1 < p_2$$

满足

$$p_0 + p_2 = 2p_1,$$

则它们组成三项等差素数链。

第十八章　任意长度等差链的固定和值镜像折叠

设

$$C_k(a,h)=1,$$

并记

$$p_j=2(a+jh)+1.$$

令

$$\boxed{N=p_0+p_{k-1}.} \tag{18.1}$$

则对每个

$$0\le j\le\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor,$$

都有

$$\boxed{p_j+p_{k-1-j}=N.} \tag{18.2}$$

定理 18.1　等差链镜像折叠定理

长度 k 的素数等差链向同一固定和值 N 至少贡献

$$\boxed{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil} \tag{18.3}$$

种互异无序素数表示。

因此：

$$\boxed{G(N)\ge\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil.} \tag{18.4}$$

若 k 为奇数，则中心项

$$p_{(k-1)/2}$$

本身为素数，而且

$$\boxed{N=2p_{(k-1)/2}.} \tag{18.5}$$

所以一条高阶关系可以向低阶固定和值切片投影出多份真实见证。

但这种高阶关系没有取代低阶关系：

每一份 Goldbach 见证仍然可以还原为具体的一对素数端点。

第十九章　等差链的平方视界

设

$$r < s$$

为相邻奇素数。

令普通奇数端点为

$$n_j = 2(a + jh) + 1.$$

假设

$$n_0 > r,$$

且最大端点满足

$$r^2 \le n_{k-1} < s^2.$$

定义

$$\boxed{P_r = \prod_{\substack{q \le r \\ q \text{ 为素数}}} q\,.} \tag{19.1}$$

定理 19.1　末端定界的链组织平方视界

在上述条件下，

$$\boxed{C_k(a,h) = 1 \Leftrightarrow \gcd\left(\prod_{j=0}^{k-1} n_j\,, P_r\right) = 1.} \tag{19.2}$$

证明

若所有 n_j 都是素数，而且

$$n_0 > r,$$

则没有一个 n_j 被任何

$$q \le r$$

的素数整除，所以最大公因数为 1。

反之，若某个 n_j 为合数，则它的最小素因子 q 满足

$$q \le \sqrt{n_j} \le \sqrt{n_{k-1}} < s.$$

由于 r, s 相邻，

$$q \le r.$$

于是

$$q \mid P_r$$

并且

$$q \mid \prod_j n_j,$$

与最大公因数为 1 矛盾。

证毕。

19.1 长链可能跨越平方边界

一条长链可能跨越某个素数平方，却没有任何端点恰好落在平方上。

因此链的平方视界应由最大端点指定，而不能要求整条链落在同一个开平方窗口中。

对

$$n_0 \le r$$

的有限边界项，可以直接按端点身份处理。

这样任意具体有限链都有完整、可终止的有限认证。

第二十章　等差链的单素数禁止类

固定奇素数 q。

一条链被 q 层阻断，当且仅当存在

$$j \in \{0, \dots, k-1\}$$

使

$$2(a + jh) + 1 \equiv 0 \pmod{q}.$$

记

$$u \equiv 2^{-1} \pmod{q}.$$

则禁止起点类为

$$\boxed{a \equiv -u - jh \pmod{q}, \qquad 0 \le j < k.} \tag{20.1}$$

定义这些类的不同余类数为

$$\rho_q(k, h).$$

定理 20.1　单素数层精确禁止类数

$$\boxed{\rho_q(k, h) = \begin{cases} 1, & q \mid h, \\ \min(k, q), & q \nmid h. \end{cases}} \tag{20.2}$$

证明

若

$$q \mid h,$$

则所有

$$-jh$$

模 q 相同，因此只禁止一个起点类。

若

$$q \nmid h,$$

则 h 在

$$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

中可逆。

所以

$$j \mapsto -u - jh$$

在前

$$\min(k, q)$$

个位置互异。

若

$$k \geq q,$$

则 j 遍历至少 q 个连续整数，因而覆盖全部 q 个剩余类。

证毕。

第二十一章　有限 CRT 层的链容量

对有限奇素数集合 S，不同素数模数互素。

因此由中国剩余定理，整条链作为单组织的允许起点余类总数为

$$\boxed{\prod_{q\in S}\bigl(q-\rho_q(k,h)\bigr).} \tag{21.1}$$

这条公式给出有限层的精确局部容量。

它回答：

> 在已经纳入的有限乘法层中，一条同差链是否被局部结构完全禁止？

若乘积为零，则至少有一个局部素数层覆盖所有起点类。

若乘积为正，则有限层中仍存在允许余类。

二者都只是局部结构结论。

真正的素数链由这些允许位置最终取得原子身份而完成。

第二十二章　长链的内禀步长容量

定理 22.1　长链步长必要条件

若

$$n_0 > k$$

且

$$C_k(a,h) = 1,$$

则

$$\boxed{\prod_{\substack{q \le k \\ q \text{ 为奇素数}}} q \mid h.} \tag{22.1}$$

证明

反设存在奇素数

$$q \le k$$

且

$$q \nmid h.$$

由定理 20.1，

$$\rho_q(k,h) = q.$$

于是 k 个端点覆盖模 q 的全部剩余类，至少有一个端点满足

$$n_j \equiv 0 \pmod{q}.$$

又因为

$$n_j \ge n_0 > k \ge q,$$

所以

$$n_j > q$$

且被 q 整除，故为合数。

与

$$C_k(a,h) = 1$$

矛盾。

证毕。

推论 22.2　固定步长不能承载无界链长

固定

$$h \geq 1.$$

取任意一个不整除 h 的奇素数 q。

那么所有端点都大于 q 的同差原子链长度必小于 q。

因此任意长素数等差链不能通过固定一个 h 无限延长。

随着链长增长，步长必须吸收越来越多低阶素数因子。

第二十三章　有限层非空模型

固定 k 和有限素数集合 S。

若取 h 为 S 中所有奇素数的乘积，则对每个

$$q \in S,$$

都有

$$q \mid h.$$

因此

$$\rho_q(k,h) = 1.$$

有限 CRT 层剩余允许类数为

$$\boxed{\prod_{q\in S}(q-1) > 0.} \tag{23.1}$$

这说明：

> 任意固定的有限低阶乘法层，都不会自动排除适当步长的同差链。

(23.2)

这里的结论是有限层兼容性。

它没有把局部允许直接替代为真实原子链。

第二十四章　高阶组织出生律

令

$$a_1 < a_2 < \cdots$$

为全部原子，并记

$$A_t = \{a_1, \ldots, a_t\}.$$

对 $k \geq 2$，定义

$$T_k(t) = \#\{(a,h): h \geq 1,\ C_k(a,h) = 1,\ a + (k-1)h \leq a_t\}.$$

定理 24.1　高阶组织出生律

对

$$t \geq 2,$$

有

$$\boxed{T_k(t) - T_k(t-1) = \sum_{h=1}^{\left\lfloor \frac{a_t - 1}{k-1} \right\rfloor} \prod_{j=1}^{k-1} \alpha\,(a_t - jh).} \tag{24.1}$$

证明

增加新原子 a_t 以后，最大端点小于 a_t 的同差链已经全部计入 $T_k(t-1)$。

新增加的链必须以

$$a_t$$

为最大端点。

若步长为 h，其余端点唯一为

$$a_t - h,\ a_t - 2h, \ldots, a_t - (k-1)h.$$

为保证首端至少为 1，必须有

$$h \leq \left\lfloor \frac{a_t - 1}{k-1} \right\rfloor.$$

这些历史端点全部为原子的条件正是乘积

$$\prod_{j=1}^{k-1} \alpha\,(a_t - jh)$$

取值 1。

对全部允许 h 求和即得。

证毕。

这说明高阶关系并不是脱离低阶原子突然出现。

每一条 k 端链都在它的最大端点原子出生时，由有限历史端点一次性决定。

第二十五章　Green–Tao 定理在统一关系语言中的表达

Green–Tao 定理说明素数中存在任意长的算术级数。

在原子坐标中，可以写成：

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ \forall M \geq 1,\ \exists a > M,\ \exists h \geq 1 : C_k(a,h) = 1.} \tag{25.1}$$

这表示：

> 对任意给定长度 k，并且无论把起点阈值推到多远，都存在一条完整的 k 端同差原子链。

在普通素数坐标中，对应公差为 $2h$。

Green–Tao 定理本身提供这一全局存在性；本篇建立的是它与统一原子母体、有限视界、关系出生和固定和值折叠之间的精确接口。

25.1　参考定理

Green–Tao 定理。 素数包含任意长的算术级数。

参考：

Ben Green and Terence Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Mathematics **167** (2008), 481–547.

第二十六章　等差链向 Goldbach 高重数的严格输送

由定理 18.1 与 Green–Tao 定理，可以得到两个直接推论。

定理 26.1　固定和值重数无界

对任意

$$R \geq 1,$$

存在无穷多个偶数 N，使

$$\boxed{G(N) \geq R.} \tag{26.1}$$

证明

取长度

$$2R$$

的素数等差链。

由镜像折叠定理，其首末和 N 至少具有

$$R$$

种互异无序素数表示。

Green–Tao 定理可以把这样的链取到任意远处，因此得到无穷多个不同的链。

若这些链只产生有限多个 N，则所有 N 有统一上界，于是所有链端点也有统一上界，只可能产生有限多个链，与可任意远取矛盾。

证毕。

定理 26.2　以素数为中心的高重数固定和值

对任意

$$R \geq 1,$$

存在无穷多个奇素数 p，使

$$\boxed{G(2p) \geq R + 1.} \tag{26.2}$$

证明

取长度

$$2R + 1$$

的素数等差链。

中心项 p 为素数。

镜像折叠给出 R 对中心两侧的素数表示，再加上

$$p + p = 2p,$$

共得到至少

$$R + 1$$

种无序表示。

Green–Tao 定理允许这样的链出现于任意远的位置，因此得到无穷多个中心素数。证毕。

这两个定理说明：

等差链不仅是第三种并列读出， 还向固定和值切片输送任意高的真实关系重数。

(26.3)

但“无穷多个高重数固定和值”与“每个允许固定和值都非空”是两个不同量词命题。

这一区分正是量词层必须单独建立的原因。

第二十七章　一个五项等差链例子

考虑素数等差链

$$5,11,17,23,29.$$

原子坐标为

$$2,5,8,11,14.$$

因此

$$k=5,\qquad a=2,\qquad h=3,$$

并且

$$C_5(2,3)=1.$$

镜像折叠得到同一个偶数

$$N=34$$

的三种表示：

$$\boxed{5+29=11+23=17+17=34.} \tag{27.1}$$

这里：

- 五个素数形成一个完整同差单组织；
- 17 是中心素数；
- 同一个高阶组织向固定和值切片输出三份低阶见证。

高阶结构之所以可以使用，是因为每一份输出都能明确还原到具体素数对。

第五部　窗口、索引、拉回与完整因子身份

第二十八章　窗口关系

不是所有关系都由有限个固定偏移点组成。

另一大类关系读取一个有限区间。

给定窗口

$$I_\theta \subset \mathbb{Z},$$

定义素数占据数

$$\boxed{W(\theta) = \sum_{n \in I_\theta} \alpha\,(n).} \tag{28.1}$$

窗口非空等价于

$$\boxed{W(\theta) \geq 1.} \tag{28.2}$$

28.1　Legendre 窗口

定义

$$\boxed{I_n = \{m : n^2 < m < (n+1)^2\}.} \tag{28.3}$$

局部关系为：

$$\boxed{L(n) = \bigvee_{n^2 < m < (n+1)^2} \alpha(m).} \tag{28.4}$$

28.2　Oppermann 双窗口

平方邻域分成：

$$I_n^- = (n(n-1), n^2),$$

与

$$I_n^+ = (n^2, n(n+1)).$$

局部谓词要求：

$$\boxed{W^-(n) \geq 1 \quad \text{且} \quad W^+(n) \geq 1.} \tag{28.5}$$

因此 Oppermann 不是单一窗口，而是一对共享平方边界的窗口关系。

28.3　Brocard 连续素数平方窗口

设

$$p_n, p_{n+1}$$

为相邻素数。

定义

$$\boxed{B(n) = \pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2).} \tag{28.6}$$

Brocard 型局部谓词为

$$\boxed{B(n) \geq 4.} \tag{28.7}$$

这里参数本身已经由素数索引生成，关系读取的是两个连续素数平方之间的窗口计数。

第二十九章　相邻素数指标关系

设

$$p_n$$

为第 n 个素数。

相邻素数关系不一定只读取 prime/composite Boolean 值，它可以读取由固定素数序列产生的数值函数。

29.1　Andrica 型关系

定义

$$\boxed{A_n = \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}.} \tag{29.1}$$

局部谓词为

$$\boxed{A_n < 1.} \tag{29.2}$$

其外层结构是逐索引全称：

$$\forall n, \quad A_n < 1.$$

29.2　Firoozbakht 型关系

原形式为

$$p_{n+1}^{1/(n+1)} < p_n^{1/n}.$$

为避免数值计算中的幂根误差，可使用等价对数形式：

$$\boxed{\frac{\log p_{n+1}}{n+1} < \frac{\log p_n}{n}.} \tag{29.3}$$

因此这类关系仍来自固定素数谱，只是局部谓词变成实数比较。

第三十章　指数与多项式拉回

30.1　Mersenne 型指数拉回

取素数指数 p，定义

$$\boxed{M(p) = 2^p - 1.} \tag{30.1}$$

局部关系为

$$\boxed{R_M(p) = \alpha(2^p - 1).} \tag{30.2}$$

如果关心 Mersenne 素数是否无限多，外层量词是：

$$\exists^{\infty} p \in \mathbb{P}: R_M(p) = 1.$$

这是指数映射对固定谱的拉回。

30.2　Bunyakovsky 型多项式拉回

给定整数系数多项式

$$f(n),$$

定义

$$\boxed{R_f(n) = \alpha(f(n)).} \tag{30.3}$$

问题从整数谱上的 prime set 被拉回到输入 n 的参数轴上。

30.3　Schinzel H 多项式束

给定多项式组

$$f_1, \dots, f_k,$$

定义

$$\boxed{R_{\boldsymbol{f}}(n) = \prod_{j=1}^{k} \alpha\left(f_j(n)\right).} \tag{30.4}$$

这与固定偏移模板形式相同：

$$\prod_{j} \alpha\left(\text{位置}_j\right),$$

区别只是位置映射从线性平移升级为一般多项式。

第三十一章　完整因子身份关系

固定谱还包含比 prime/composite 更丰富的字段。

定义

$$\mathrm{PF}(n)$$

为 n 的不同素因子集合。

这使某些关系能够直接读取“合数内部身份”。

31.1　Grimm 型因子匹配

考虑连续合数块

$$n+1,\dots,n+k.$$

每个位置携带素因子集合

$$\mathrm{PF}(n+i).$$

构造二分图：

- 左侧顶点：位置 $1,\dots,k$；
- 右侧顶点：出现过的素因子；
- 若 $p \mid n+i$，就在位置 i 与素数 p 之间连边。

关系谓词要求存在一个匹配，使每个位置获得一个互不相同的素因子。

因此 Grimm 型关系的局部对象是：

$$\boxed{\text{完整因子集合} + \text{二分图匹配.}} \tag{31.1}$$

31.2　Erdős–Woods 型身份块

取两个起点 x,y 和块长 k。

比较：

$$\mathrm{PF}(x+i), \qquad \mathrm{PF}(y+i),$$

对

$$0 \le i \le k.$$

局部身份块相同的条件为

$$\boxed{\mathrm{PF}(x+i)=\mathrm{PF}(y+i) \quad \text{对所有 } i.} \tag{31.2}$$

这类关系已经超出二值素数谱，却仍然属于同一固定算术身份母体。

第六部　量词结构：全称、无限与其他整体要求

图 3-12　窗口 / 索引 / 拉回 / 因子身份四类读取

关系切片不只包含固定和与固定差；第三篇把窗口、素数索引、函数拉回和完整因子身份纳入同一关系语言。

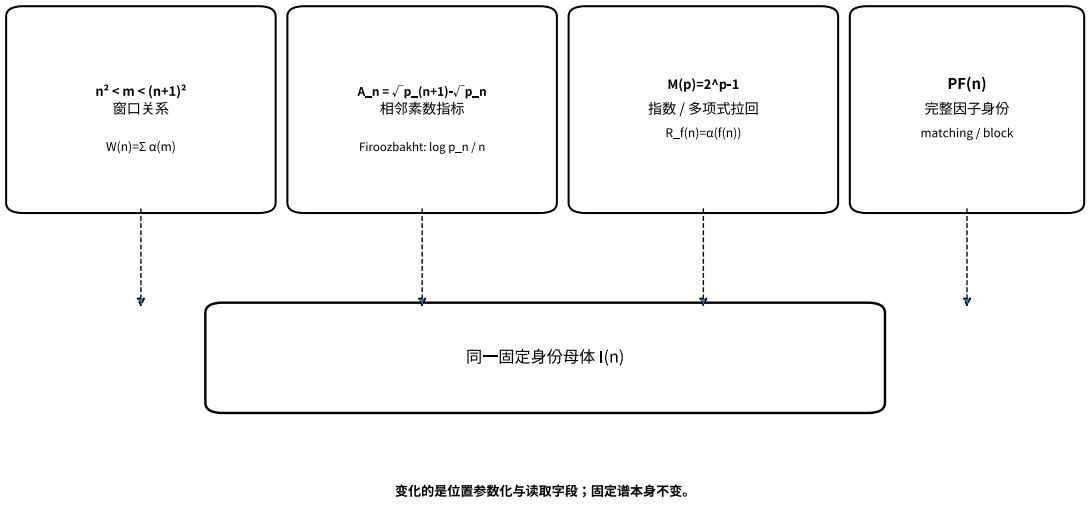


图 3-12　窗口 / 索引 / 拉回 / 因子身份四类读取。 第三篇把关系切片从固定和、固定差继续扩展到四类对象：有限窗口占据、相邻素数指标函数、指数/多项式位置映射对固定谱的拉回，以及完整素因子身份与匹配关系。变化的是位置参数化与读取字段，固定算术身份谱本身不变。

第三十二章　量词不是装饰：它决定命题的全局类型

两个问题即使局部关系完全相同，只要外层量词不同，就可能成为不同数学命题。

因此量词必须单独分类。

32.1　有限读取

形式：

$$\boxed{R_\Theta(x)\quad \text{在有限参数和有限视界内直接计算.}} \tag{32.1}$$

它只回答有限事实，不增加全局命题。

32.2　无限回归

形式：

$$\boxed{\exists^{\infty}x: R(x)=1.} \tag{32.2}$$

定义

$$C_R(X)=\sum_{x\le X} R\,(x).$$

则

$$\boxed{\exists^{\infty}x: R(x)=1 \Leftrightarrow C_R(X)\ \text{无界.}} \tag{32.3}$$

这是最基本的无限性判据。

32.3　逐参数全称纤维

形式：

$$\boxed{\forall\theta\in\Theta,\quad \exists x: R_\theta(x)=1.} \tag{32.4}$$

定义纤维计数

$$C(\theta)=\sum_{x} R_\theta\,(x).$$

则

$$\boxed{\forall\theta\ \exists x: R_\theta(x)=1 \Leftrightarrow C(\theta)>0\quad \forall\theta.} \tag{32.5}$$

Goldbach 型命题属于这一类。

32.4　窗口全称

形式：

$$\boxed{\forall n,\quad \exists x\in I_n: \alpha(x)=1.} \tag{32.6}$$

定义

$$W(n) = \sum_{x \in I_n} \alpha\,(x).$$

则

$$\boxed{W(n) \geq 1 \quad \forall n} \tag{32.7}$$

与窗口全称完全等价。

Legendre、Oppermann 属于这一类。

32.5 任意长度

形式：

$$\boxed{\forall k, \quad \exists \Theta, x : R_{k,\Theta}(x) = 1.} \tag{32.8}$$

定义截止视界 X 内的最大已实现长度

$$L(X) = \max\{k : \exists \Theta, x \leq X, R_{k,\Theta}(x) = 1\}.$$

则

$$\boxed{\forall k\ \exists \Theta, x \Leftrightarrow L(X) \text{ 无界.}} \tag{32.9}$$

Green–Tao 属于这一类型。

32.6 参数无限

形式：

$$\boxed{\exists^{\infty} \theta, \quad \exists x : R_{\theta}(x) = 1.} \tag{32.10}$$

它关注成功参数本身是否无限，而不是某个固定参数下是否有无限多个锚点。

32.7 逐索引全称谓词

形式：

$$\boxed{\forall n, \quad P(n).} \tag{32.11}$$

例如：

- Andrica；
- Firoozbakht；
- Brocard；
- 某些 Grimm 型逐块命题。

定义失败计数

$$F(X) = \sum_{n \leq X} \mathbf{1}_{\{\neg P(n)\}}.$$

全称成立等价于：

$$\boxed{F(X) = 0 \quad \forall X.} \tag{32.12}$$

32.8　身份块分离

这一类型比较两个不同起点的有限身份块。

局部条件为：

$$B_k(x) = B_k(y),$$

其中

$$B_k(x) = (\mathrm{PF}(x), \dots, \mathrm{PF}(x+k)).$$

全局分离型命题要求存在统一有限长度，使不同起点最终必可区分。

这种量词结构与普通无限回归完全不同，必须单独处理。

图 3-13　七类全局量词接口

同一关系母体可以被七种主要全局量词读取；量词不同，有限证书也不同。

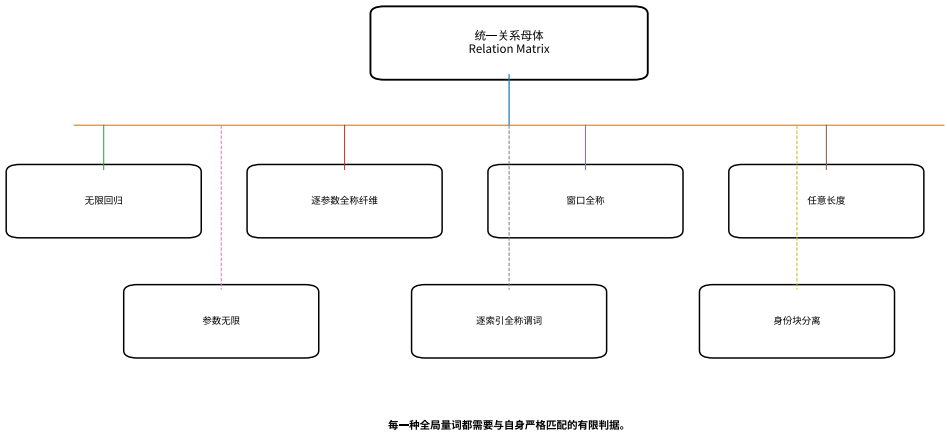


图 3-13　七类全局量词接口。 同一关系母体可以被七种主要全局量词读取：无限回归、逐参数全称纤维、窗口全称、任意长度、参数无限、逐索引全称谓词与身份块分离。每一种量词要求与之匹配的有限证书。

第三十三章　为什么“全称”与“无限”必须分开

下面两个命题外表都包含无穷多个整数：

$$\forall N\ \exists p,$$

与

$$\exists^{\infty} p.$$

但它们要求的证明结构完全不同。

33.1　全称纤维要求“每一列非空”

若

$$C(N) = \sum_{p} R_N(p),$$

则需要：

$$\boxed{C(N) > 0 \quad \text{对每个 } N.} \tag{33.1}$$

任何有限多个成功 N、平均正值或累计无界，都不能替代这一条件。

33.2　无限回归要求“总命中不断增长”

若

$$C_R(X) = \sum_{x \le X} R(x),$$

则只需要：

$$\boxed{C_R(X) \text{ 无界.}} \tag{33.2}$$

这里允许存在任意大的空隙。

所以：

全称强调没有漏掉任何参数；无限强调没有最后一次命中。

(33.3)

这一区分是批量论证的第一纪律。

第七部　批量论证与全局闭合

第三十四章　批量论证：一次证明覆盖整个参数族

逐个计算一百万个参数，仍然是一百万个有限事实。

批量论证的本质不是“计算很多”，而是一个统一规则覆盖整个参数族。

定义 34.1　批量证书

设参数空间为

$$\Theta,$$

目标命题为

$$\mathcal{P}(\theta).$$

若存在证书状态空间

$$\mathcal{S}$$

和映射

$$\boxed{\mathcal{C}:\Theta\to\mathcal{S},} \tag{34.1}$$

并满足以下两项：

覆盖性

每个

$$\theta\in\Theta$$

都进入某个合法证书状态；

正确性

每个合法证书状态都推出

$$\mathcal{P}(\theta);$$

则称

$$\mathcal{C}$$

为该参数族的批量证书。

于是：

$$\boxed{\forall\theta\in\Theta,\quad \mathcal{P}(\theta).} \tag{34.2}$$

34.1　批量论证不是批量枚举

批量枚举的形式是：

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_M$$

逐个检查。

批量论证的形式是：

$$\boxed{\text{同一个有限规则对任意 } \theta \text{ 成立.}} \tag{34.3}$$

因此无限参数族也可以被有限规则控制。

第三十五章　全称纤维的批量判定

设

$$R_\theta(x)$$

为局部关系。

定义纤维

$$\mathcal{F}_\theta = \{x : R_\theta(x) = 1\}.$$

全称目标为

$$\forall \theta, \quad \mathcal{F}_\theta \neq \varnothing.$$

批量论证可以有多种形式。

35.1　统一正下界

如果能够构造

$$L(\theta)$$

使

$$\boxed{|\mathcal{F}_\theta| \geq L(\theta) > 0} \tag{35.1}$$

对全部参数成立，则全称立即得到。

35.2　失败状态排除

定义空纤维坏状态

$$\mathcal{B} = \{\theta : \mathcal{F}_\theta = \varnothing\}.$$

若能证明：

$$\boxed{\mathcal{B} = \varnothing,} \tag{35.2}$$

同样闭合全称。

35.3　最小反例排除

如果参数具有良序，例如正整数，可以假设存在最小失败参数

$$\theta_0.$$

若由所有较小参数已经满足关系，再结合母体递推推出 θ_0 也必须满足，则得到矛盾。

这是传播型批量论证的一种标准形式。

第三十六章　无限回归的批量判定

无限回归目标：

$$\exists^{\infty} x: R(x) = 1.$$

由计数判据，只需证明：

$$C_R(X)$$

无界。

36.1　直接增长

若存在单调无界函数

$$L(X)$$

使

$$\boxed{C_R(X) \geq L(X),} \tag{36.1}$$

则无限回归成立。

36.2　累计净势

若每个有限区块都有关系供给

$$B_k$$

和最大吸收容量

$$C_k,$$

定义净势

$$\boxed{e_k = B_k - C_k.} \tag{36.2}$$

累计：

$$\boxed{\mathcal{E}(N) = \sum_{k \leq N} e_k\,.} \tag{36.3}$$

若真实命中累计量 $T(N)$ 满足

$$T(N) \geq \mathcal{E}(N),$$

且

$$\boxed{\limsup_{N \to \infty} \mathcal{E}(N) = +\infty,} \tag{36.4}$$

则

$$T(N)$$

无界，因此关系无限回归。

这类结构把无限性转化为：

长期供给是否能够被长期吸收完全抵消。 (36.5)

第三十七章　四类基本闭合方式

批量论证常见的闭合方式可以归纳为四类。

37.1　有限商闭合

若无限参数族在某个等价关系下只有有限个状态：

$$\Theta/\sim=\{s_1,\dots,s_M\},$$

并且目标只依赖状态，则验证有限个状态即可覆盖全部参数。

有限模结构与 CRT 常产生这种闭合。

37.2　传播闭合

若存在规则

$$\boxed{P(\theta)\Rightarrow P(T\theta)} \tag{37.1}$$

并且有限起点经 T 的轨道覆盖全部参数，则有限基础加传播规则闭合全称。

37.3　累计势闭合

若关系累计量存在统一下界

$$C(X)\geq E(X),$$

且

$$E(X)$$

无界，则无限回归闭合。

37.4　坏状态排除闭合

若所有失败状态组成

$$\mathcal{F}_{\mathrm{bad}},$$

所有可达状态组成

$$\mathcal{R},$$

并证明

$$\boxed{\mathcal{F}_{\mathrm{bad}}\cap\mathcal{R}=\varnothing,} \tag{37.2}$$

则失败不可能发生。

37.5 局部有限—整体全局拼接

全称命题还有一种极为重要的闭合形式：

> 无限目标空间可以被分成一列互不重叠的有限终端段；每个目标只需在属于自己的那一段中完成认证。

设目标空间 Y 分解为

$$\boxed{Y = \bigsqcup_{k\geq 1} J_k.} \tag{37.3}$$

设持久关系系统满足

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_\infty,$$

关系坐标为

$$\theta : \Gamma_\infty \to Y.$$

定义第 k 层读出支撑

$$\boxed{S_k^\theta = \theta(\Gamma_k).} \tag{37.4}$$

假设每个目标 $y \in J_k$ 在第 k 层已经终端：

$$\boxed{y \in J_k \Rightarrow \Gamma_\infty^{(\theta=y)} = \Gamma_k^{(\theta=y)}.} \tag{37.5}$$

则有：

定理 37.1　局部有限—整体全局拼接定理

在上述条件下，

$$\boxed{\forall y \in Y, \quad \Gamma_\infty^{(\theta=y)} \neq \varnothing} \tag{37.6}$$

当且仅当

$$\boxed{\forall k, \quad J_k \subseteq S_k^\theta.} \tag{37.7}$$

证明

先设

$$\forall y \in Y, \quad \Gamma_\infty^{(\theta=y)} \neq \varnothing.$$

任取 k 和 $y \in J_k$。

由终端条件：

$$\Gamma_\infty^{(\theta=y)} = \Gamma_k^{(\theta=y)}.$$

左侧非空，所以右侧非空，即

$$y \in S_k^\theta.$$

于是

$$J_k \subseteq S_k^{\theta}.$$

反过来，设对所有 k：

$$J_k \subseteq S_k^{\theta}.$$

任取 $y \in Y$。

由于

$$Y = \bigsqcup_{k\geq 1} J_k,$$

存在唯一 k 使

$$y \in J_k.$$

于是

$$y \in S_k^{\theta},$$

故

$$\Gamma_k^{(\theta=y)} \neq \varnothing.$$

由

$$\Gamma_k \subseteq \Gamma_\infty,$$

得到

$$\Gamma_\infty^{(\theta=y)} \neq \varnothing.$$

证毕。

因此：

无限全称量词被无损重写为无穷多个有限终端命题。 (37.8)

这里没有把无限目标“算完”。

真正发生的是：

每一个目标 → 唯一有限终端段 → 该段中的有限非空判定.

固定和值的自然终端段正是这一母定理的典型实例；第四篇将把它具体展开。

第八部　关系等价、可执行语法与总定理

第三十八章　关系等价与关系不同

统一语言进一步明确：

> 两个写法不同的关系，什么时候只是同一个关系的不同坐标？

定义 38.1　无损关系等价

设两个关系描述

$$R \quad 与 \quad R'$$

分别具有关系实例空间

$$\mathcal{X}, \qquad \mathcal{X}'.$$

若存在双射

$$\Phi: \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$$

使：

1. 固定谱端点身份一一对应；
2. 局部谓词真假保持；
3. 外层量词在映射下保持；

则称二者为**无损关系等价**。

38.1　Goldbach 原子坐标与普通素数坐标

普通坐标：

$$p + q = N.$$

原子坐标：

$$a + b + 1 = m, \qquad N = 2m.$$

由

$$p = 2a + 1, \qquad q = 2b + 1$$

一一对应。

因此两种写法只是同一关系的无损坐标变换。

38.2　固定差与关系平面水平切片

普通坐标：

$$q - p = 2h.$$

关系平面：

$$(m, h) \in \Gamma.$$

二者也无损等价。

38.3 计数相同不构成关系等价

如果两个关系状态只有：

$$|R_1| = |R_2|,$$

并不能推出它们关系等价。

第二篇中的关系筛例子已经说明：

相同剩余槽数可以产生不同的下一层更新。

因此：

数值相同不是关系相同。 (38.1)

第三十九章　关系语言的最小操作

统一关系语言只需要少数基本操作。

R1　位置映射

$$x \mapsto f_\Theta(x).$$

R2　身份读取

$$f_\Theta(x) \mapsto \boldsymbol{I}(f_\Theta(x)).$$

R3　有限逻辑与有限比较

包括：

$$\wedge,\quad \vee,\quad \neg,$$

以及：

$$=,\quad <,\quad >,\quad \#,\quad \text{matching}.$$

R4　窗口聚合

例如：

$$\sum_{n\in I}\alpha\,(n),$$

或

$$\prod_{n\in I}(1-\alpha(n)).$$

R5　外层量词

包括：

$$\forall,\qquad \exists,\qquad \exists^{\infty},$$

以及带长度参数、窗口参数或块参数的嵌套量词。

由此得到：

关系语言不需要重新定义素数；它只需要定义位置、读取、组合和量词。

(39.1)

第四十章　从数学语法到可执行关系语言

把关系规范形写成可执行形式，只需把下列字段显式化：

anchor	锚点变量及其有限读取区间,
parameters	关系参数,
maps	位置映射族,
predicate	局部关系谓词,
quantifier	外层量词,
certificate	可选的有限证书模块.

(40.1)

这就是一般关系描述语言的数学基础。

预置的 Goldbach、Twin、Legendre 等名称只是常用模板。

真正的理论边界由关系语法决定，而不是由菜单中已经列出的猜想决定。

因此：

预置目录不是理论边界；　　关系语法才是理论接口。

(40.2)

第四十一章　三个自定义关系例子

统一语法不仅能还原已有问题，也可以自然生成新的关系切片。

41.1　交叉镜像关系

要求：

$$p, \qquad p+2, \qquad 2p+1$$

同时为素数。

定义

$$\boxed{X(p) = \alpha(p)\alpha(p+2)\alpha(2p+1).} \tag{41.1}$$

这是固定平移与仿射映射的耦合。

若询问是否无限出现，则外层量词为：

$$\exists^{\infty} p : X(p) = 1.$$

41.2　二次双原子关系

定义

$$f_1(n) = n^2 + n + 41,$$

$$f_2(n) = n^2 + n + 43.$$

局部关系：

$$\boxed{Q(n) = \alpha(f_1(n))\alpha(f_2(n)).} \tag{41.2}$$

这是双多项式拉回。

41.3　反射—平移耦合关系

固定偶数 N，要求：

$$p, \qquad p+2, \qquad N-p$$

同时为素数。

定义

$$\boxed{H_N(p) = \alpha(p)\alpha(p+2)\alpha(N-p).} \tag{41.3}$$

它同时使用：

- 固定差；
- 固定和反射。

若要求对每个允许 N 都存在这样的 p，则属于逐参数全称纤维型。

这些例子说明：

统一关系语言不仅组织既有问题， 也可以系统产生新的关系对象。

(41.4)

第四十二章　关系类型与量词类型是两个独立坐标

关系类型回答：

> 局部对象长什么样？

量词类型回答：

> 这个局部对象要求在多大的参数族上成立？

例如固定模板

$$H = \{0,2\}$$

本身只是局部关系。

可以问：

$$R_H(n) = 1$$

对某个给定 n 是否成立；

也可以问：

$$\exists n: R_H(n) = 1;$$

还可以问：

$$\exists^{\infty} n: R_H(n) = 1.$$

三者使用完全相同的局部关系，却是三个不同命题。

因此：

关系类型与量词类型必须正交保存。 (42.1)

这也是统一语言能够避免混淆的重要原因。

第四十三章　经典关系的统一表

关系	位置映射 / 关系对象	局部谓词	典型量词
Goldbach	$p, N-p$	两端为素数	$\forall N \exists p$
Lemoine/Lévy	$p, (N-p)/2$	两端为素数	$\forall N \exists p$
Twin	$p, p+2$	两端为素数	$\exists^{\infty} p$
fixed gap	$p, p+d$	两端为素数	视命题而定
Polignac	$p, p+d$+中间窗口	端点素数且中间无素数	$\exists^{\infty} p$
Sophie Germain	$p, 2p+1$	两端为素数	$\exists^{\infty} p$
prime tuple	$n+H$	全端点为素数	$\exists^{\infty} n$
Green–Tao	$a, a+h, \dots, a+(k-1)h$	全端点为原子	$\forall k \exists a, h$
Legendre	$(n^2, (n+1)^2)$	窗口非空	$\forall n$
Oppermann	两个半平方窗口	两窗口均非空	$\forall n$
Brocard	(p_n^2, p_{n+1}^2)	素数数目至少 4	$\forall n$
Andrica	p_n, p_{n+1}	根差小于 1	$\forall n$
Firoozbakht	p_n, p_{n+1}	对数根单调	$\forall n$
Mersenne	$p \mapsto 2^p - 1$	映射值为素数	$\exists^{\infty} p$
n^2+1	$n \mapsto n^2+1$	映射值为素数	$\exists^{\infty} n$
Bunyakovsky	$n \mapsto f(n)$	映射值为素数	$\exists^{\infty} n$
Schinzel H	$n \mapsto (f_1(n), \dots, f_r(n))$	全值为素数	$\exists^{\infty} n$
Grimm	连续合数块	互异素因子匹配	逐块全称
Erdős–Woods	两个因子身份块	块身份比较	身份块分离

这张表不是猜想的摘要表，而是关系语言的分类表。

它显示，表面差异很大的问题，可以落在有限个底层读取类型中。

第四十四章　批量论证的最低完整条件

一个真正覆盖无限参数族的批量论证至少要同时满足四个条件。

44.1　关系保真

证书必须保留目标命题需要的关系信息。

如果目标需要反射配对，就不能只保存边际密度。

如果目标需要完整因子集合，就不能只保存最小素因子。

44.2　有限局部正确

对每个固定参数，证书的有限判定必须与原关系真假一致。

44.3　参数覆盖

证书必须适用于全部目标参数，而不是只适用于大部分参数、平均参数或有限检查范围。

44.4　量词闭合

证书必须与目标量词匹配：

- 全称需要每个参数非空或失败不可达；
- 无限回归需要累计命中无界；
- 任意长度需要最大实现长度无界；
- 身份块分离需要统一有限分离长度。

因此：

关系保真 + 局部正确 + 参数覆盖 + 量词闭合 = 批量论证的完整结构。

(44.1)

图 3-14　批量论证的最低完整条件

一个覆盖无限参数族的批量证书至少同时满足四项条件；任一项缺失，闭合都不完整。

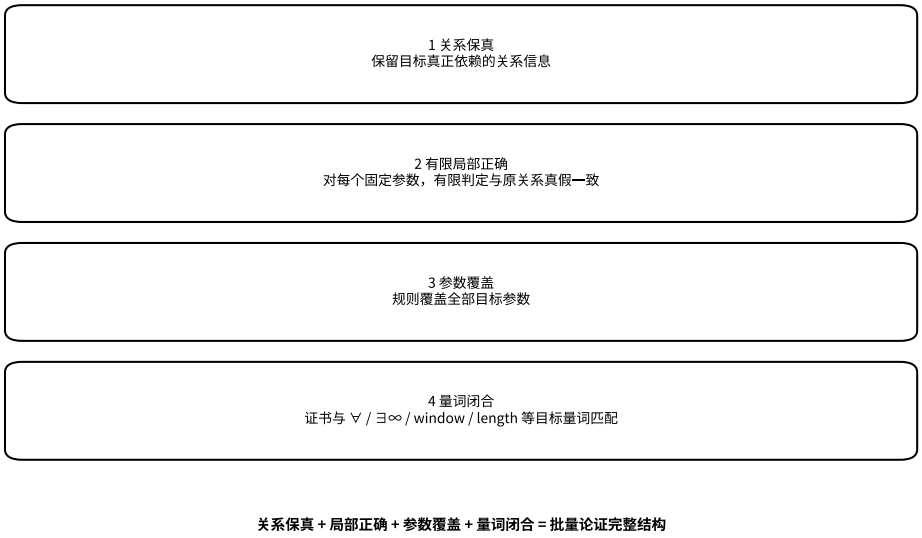


图 3-14　批量论证的最低完整条件。 覆盖无限参数族的批量论证至少同时满足四项：关系保真、有限局部正确、参数覆盖与量词闭合。关系信息不能在压缩中丢失；每个固定参数的有限判定必须正确；规则必须覆盖全部目标参数；最终证书还必须与全称、无限回归、窗口全称或任意长度等外层量词匹配。

第四十五章　高阶结构何时有价值

高阶结构并不因为“高阶”而自动更强。

它只有在满足下列条件时才真正有用：

$$\boxed{\text{高阶结构} \rightarrow \text{可恢复的低阶见证}} \tag{45.1}$$

例如：

- Green–Tao 长链可以折叠成具体 Goldbach 素数对；
- 固定和值见证多列交叠可以精确还原 prime constellations；
- 二原子和—差平面可以无损还原具体素数对。

这些都是合法的高阶使用。

相反，如果只留下一个平均量，却无法确定目标的一对端点是否存在，那么它不能独立完成低阶关系证明。

因此全书保留一句基本纪律：

$$\boxed{\text{结构可以升阶；　　见证不能丢失。}} \tag{45.2}$$

第四十六章　本篇基础定理总表

基础定理 O　二原子关系平面无损性

$$\boxed{(m,h) \leftrightarrow \{m-h, m+h\}.}$$

固定和值与固定差是同一二原子关系对象的不同坐标纤维。

基础定理 O1　固定积双曲叶

$$\boxed{(m-h)(m+h) = m^2 - h^2.}$$

因此固定积 M 在关系平面上对应：

$$\boxed{m^2 - h^2 = M.}$$

基础定理 O2　总乘法深度恒等式

$$\boxed{\Omega(m-h) + \Omega(m+h) = \Omega(m^2-h^2).}$$

固定积叶上的总乘法深度等于 $\Omega(M)$。

基础定理 O3　壳交点双射

$$\boxed{L_x^- \cap L_y^+ = \left\{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)\right\}.}$$

二端关系实例与异向壳唯一交点一一对应。

基础定理 O4　壳层增长与关系增长等价

若已有 K 个原子并加入 M 个新原子，则新增无序关系数为：

$$\boxed{KM + \frac{M(M+1)}{2}.}$$

几何上恰为旧—新矩形与新—新三角区。

基础定理 O5　正交生成

$$\boxed{C(x,y) = \frac{x}{2}(1,-1) + \frac{y}{2}(1,1),}$$

且：

$$\boxed{(1,-1)\cdot(1,1) = 0.}$$

prime gap 因而成为关系网格的局部几何步长。

基础定理 P　见证持续恒等式

$$\boxed{\sum_{m} |\, W_K(m) \cap W_K(m+h)| = K\, T_{K,h}.}$$

Twin 是 $h = 1$ 的特例。

基础定理 Q　多列持续恒等式

$$\boxed{\sum_{m} \Big|\bigcap_{h\in H} W_K(m+h)\Big| = K\, T_K(H).}$$

有限 prime constellations 可以读取为固定和值见证场的多列持续。

基础定理 R　同差链拼接

$$\boxed{C_k(a,h) = \prod_{j=0}^{k-2} E_h\,(a+jh).}$$

基础定理 S　等差链镜像折叠

$$\boxed{p_j + p_{k-1-j} = p_0 + p_{k-1}.}$$

因此：

$$\boxed{G(N) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil.}$$

基础定理 T　单素数禁止类数

$$\boxed{\rho_q(k,h) = \begin{cases} 1, & q \mid h, \\ \min(k,q), & q \nmid h. \end{cases}}$$

基础定理 U　有限 CRT 链容量

$$\boxed{\prod_{q\in S} (\,q - \rho_q(k,h)).}$$

基础定理 V　长链步长必要条件

若完整 k 端同差素数链的首端大于 k，则：

$$\boxed{\prod_{\substack{q\leq k \\ q \text{ 奇素数}}} q \mid h.}$$

基础定理 W　高阶组织出生律

$$\boxed{T_k(t) - T_k(t-1) = \sum_{h} \prod_{j=1}^{k-1} \alpha\,(a_t - jh),}$$

其中 h 取使首端为正的全部整数。

基础定理 X　无限回归判据

$$\boxed{\exists^{\infty} x : R(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x \le X} R\,(x) \text{ 无界.}}$$

基础定理 Y　全称纤维判据

$$\boxed{\forall \theta \exists x : R_\theta(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x} R_\theta\,(x) > 0 \quad \forall \theta.}$$

基础定理 Z　批量证书原则

若统一证书映射同时满足关系保真、局部正确、参数覆盖和量词闭合，则它一次覆盖整个参数族。

基础定理 Z1　局部有限—整体全局拼接

若

$$Y = \bigsqcup_{k \ge 1} J_k$$

且

$$y \in J_k \Rightarrow \Gamma_{\infty}^{(\theta=y)} = \Gamma_{k}^{(\theta=y)},$$

则：

$$\boxed{\forall y \in Y,\ \Gamma_{\infty}^{(\theta=y)} \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall k,\ J_k \subseteq S_k^{\theta}.}$$

图 3-15　第三篇统一关系地图

关系平面只是入口；第三篇最终形成“关系对象—一般语言—量词类型—批量证书”的完整编译链。



图 3-15　第三篇统一关系地图。 第三篇从无损二原子关系平面出发，经过固定和、固定差、固定积、壳层、见证持续、仿射与高阶模板，再扩展到窗口、索引、函数拉回和完整因子身份，最终编译成统一关系规范形、全局量词分类与批量证书。

结语　一张谱，不是一种关系

固定谱的统一性很容易被误读成一句过分简单的话：

> 既然素数位置已经固定，关系只是查表。

本篇给出了恰好相反的结论。

素数身份固定，只说明关系不需要重新制造素数。

它并没有告诉我们：

- 哪些位置必须成对；
- 哪些位置必须同时出现；
- 哪些窗口必须非空；
- 哪些关系必须连续；
- 哪些参数要求全称；
- 哪些命中要求无限；
- 哪些高阶组织必须保留低阶见证。

这些全部属于关系本身。

因此：

固定谱解决“是什么”；　关系理论解决“怎样在一起”。

和值、差值、仿射、窗口、多项式、指数、相邻素数、完整因子集合，都不是固定谱的冗余装饰。

它们是固定事实被组织成数学命题的方式。

正因为这些关系被还原到足够低阶，才可能出现真正的统一。

Goldbach 与 Twin 不只是“一个看和，一个看差”。

它们可以进入同一个二原子关系平面。

而这个平面也不只承载和与差。

由

$$(m-h)(m+h)=m^2-h^2,$$

同一关系点还落在一条固定积双曲叶上。

所以：

和、差、积是同一二端关系的三种叶层。

端点本身又可以写成两族异向壳：

$$L_x^-, \qquad L_y^+.$$

每个二端关系实例恰是两壳的唯一交点，而两端又沿

$$(1,-1), \qquad (1,1)$$

两条正交方向生成整个关系网格。

因此 prime gap 也获得了第二重意义：

它既是一维原子序列的间隔， 也是二维关系几何的局部步长。

这些几何结构没有增加第二套素数对象。

它们只是把同一固定身份谱中已经存在的端点关系完整展开。

Twin 甚至可以由固定和值见证场的相邻列持续精确读出：

$$\sum_m |W_K(m)\cap W_K(m+1)| = K\,T_{K,1}.$$

更一般地：

$$\sum_m \left|\bigcap_{h\in H} W_K(m+h)\right| = K\,T_K(H).$$

所以：

同一个固定和值关系场， 携带全部有限 prime constellations 的精确有限读数。

Green–Tao 则说明高阶等差链可以在同一关系母体中自然形成，并通过镜像折叠向固定和值切片输送任意高重数：

高阶关系可以丰富低阶关系， 但必须能够回到低阶见证。

全称与无限也不能被混成一个模糊的“无限问题”。

当目标空间存在自然有限终端分割时，全称还可以获得一种特别精确的结构：

$$Y = \bigsqcup_{k\geq 1} J_k,$$

并且每个 $y \in J_k$ 在第 k 层终端。

此时：

无限全称量词可以无损重写为无穷多个有限终端命题。

这不是把全称削弱为有限检查，而是把每一个目标准确送回属于自己的有限世界。

它们分别要求：

每一纤维非空,

累计命中无界,

每个窗口占据,

最大实现长度无界,

或其他与自身量词完全匹配的判定。

由此，全书的统一关系结构可以写成：

固定算术身份谱
⇓
二原子关系几何
⇓
低阶关系见证
⇓
关系位置映射
⇓
局部关系谓词
⇓
关系切片
⇓
量词类型
⇓
批量证书.

这条链条给“统一”规定了严格含义：

> **统一的是语言、母体和证明接口； 保留的是每一种关系真正不可删除的结构。**

只有做到这一点，批量处理素数关系才不是把不同问题强行归一，而是让不同问题在同一底层结构中各自保持完整身份。

第四篇　有限控制几何、局部阻塞与关系筛

——从局部相位、生存树、真实死亡到固定和值的终端饱和结构

本篇主旨

前三篇已经建立：

固定身份 → 关系还原 → 有限终端 → 关系切片 → 量词结构.

本篇进入关系理论的有限控制层。

固定谱告诉我们每个位置最终是什么；关系切片告诉我们哪些位置必须一起看；有限控制几何进一步回答：

一个有限乘法层怎样作用于整条关系，而不丢失关系本身？

这需要同时保存三种结构：

乘法深度 + 关系位置 + 真实死亡履历.

由此形成“关系筛”：

元素筛判断端点身份；　关系筛判断这些身份在指定关系中怎样共同存在、共同消解或共同终端。

固定和值关系是本篇最完整的终端饱和型实例。它不会被当成一套孤立技术，而是一般有限控制几何在二原子反射纤维上的具体展开，并在这一结构中完成 Goldbach 的全称闭合。

摘要

本篇建立统一素数关系理论的有限控制几何。

设正奇数关系空间为

$$\mathcal{X}_r = \mathbb{O}_{\geq 3}^{r}.$$

对关系点

$$(x_1, \dots, x_r)$$

定义乘法深度张量

$$\Delta_r(x_1, \dots, x_r) = (\Omega(x_1), \dots, \Omega(x_r)).$$

全部端点都是奇素数恰好对应

$$\Delta_r = (1, \dots, 1).$$

因此定义原子顶点骨架

$$\boxed{\mathcal{V}_r = \Delta_r^{-1}(1,\dots,1) = \mathbb{P}^r_{\text{odd}}.}$$

任意有限阶全素数关系，都可以写成某条关系轨道

$$F:\mathcal{U} \to \mathcal{X}_r$$

与原子顶点骨架的交：

$$\boxed{\{t: F_1(t),\dots,F_r(t) \text{ 全为素数}\} = F^{-1}(\mathcal{V}_r).}$$

为了描述有限控制层，在每一个素数 ℓ 上定义局部阻塞集

$$B_\ell(F) = \left\{ t \bmod \ell : \prod_{j=1}^{r} F_j(t) \equiv 0 \pmod{\ell} \right\}.$$

若某个 $B_\ell(F)$ 覆盖全部参数余类，则该关系被一个局部乘法层完全阻断。若没有任何素数层完全阻断，则称关系通过局部许可。局部许可只排除局部完全封死，不自动推出整体占据。

对有限偏移模板

$$H = \{h_1,\dots,h_k\},$$

定义

$$\nu_H(q) = \#\{h \bmod q : h \in H\}, \qquad v_H(q) = q - \nu_H(q).$$

若

$$\nu_H(q) = q,$$

则每个平移都至少有一个端点被 q 整除，因而全素数关系除有限边界例外外被完全阻断。若

$$\nu_H(q) < q$$

对所有素数 q 成立，则模板通过局部许可。只需检查

$$q \le |H|$$

即可发现完全覆盖。

有限轮局部容量还能进一步展开成一棵精确的 **CRT 生存树**。取依次加入的控制素数

$$p_1,\dots,p_s, \qquad W_s = \prod_{i=1}^{s} p_i.$$

定义第 s 层联合存活余类集 $A_s(H)$，则

$$\boxed{|A_s(H)| = \prod_{i=1}^{s} (p_i - \nu_H(p_i)).}$$

若

$$\eta_i = 1 - \frac{\nu_H(p_i)}{p_i},$$

则生存比例为

$$\boxed{\frac{|A_s(H)|}{W_s} = \prod_{i=1}^{s} \eta_i .}$$

更进一步，全部模 W_s 参数相位被精确分成“最终联合存活”与“在某一层首次局部淘汰”：

$$\boxed{1 = \prod_{i=1}^{s} \eta_i + \sum_{i=1}^{s} (1-\eta_i) \prod_{j<i} \eta_j .}$$

因此局部筛选不只是一个最终乘积，而是一条完整的首次淘汰履历：

$$\boxed{\text{全部参数相位} = \text{联合存活} \sqcup \text{各层首次局部淘汰.}}$$

这条相位级守恒随后与真实死亡、最小素因子和关系 first-killer 对接。

对等差模板

$$H_{k,d} = \{0, d, \dots, (k-1)d\},$$

其固定模板通过所有 $q \le k$ 的局部许可，必须满足这些素数全部整除 d。

在单点身份层，本篇引入真实死亡分区。对奇合数 n，唯一第一责任素数为

$$P^-(n).$$

定义

$$D_q = \{n : P^-(n) = q\}.$$

不同 D_q 两两不交。于是每个奇合数只在最小素因子层真实死亡一次。

这一思想提升到关系层。一个有限关系槽只有在某个端点第一次被确认为合数时才真实死亡，并记录唯一 first-killer。关系筛的状态不只是“剩多少”，而必须保留具体关系位置、端点身份、first-killer 与必要的关系履历。

为了把不同终端状态统一写成有限对象，本篇定义**关系字母表**。若端点终端身份记为

$$A, \qquad \mathcal{M}, \qquad \partial,$$

则一个 r-端关系对应一个身份字

$$\omega(R) = (\iota(n_1), \dots, \iota(n_r)).$$

某类关系能够出现的全部终端身份字组成

$$\boxed{\Sigma_R.}$$

固定和值的无序二端槽具有三类粗终端字：

$$\boxed{AA,\qquad A\mathcal{M},\qquad \mathcal{M}\mathcal{M}.}$$

而在 Twin 的单平方视界旧双逃逸净化层中，由于同一个当前控制素数不可能同时整除相差 2 的两个端点，层内字母表缩为

$$\boxed{AA,\qquad \mathcal{M}_r A,\qquad A\mathcal{M}_r.}$$

关系字母表把“关系最后可能成为什么”变成一个有限、可列举、可验证的对象。

固定和值实例给出一个重要反例：两个目标可以具有相同初始槽数，并在 $q=3$ 后具有相同剩余槽数，却在 $q=5$ 层产生不同更新。因此

$$(H,|S_q|)$$

不是关系状态的充分描述。关系位置和余类配置是真实信息。

在乘法深度奇偶层，定义

$$\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}.$$

最小素因子真实死亡满足

$$\lambda(qm)=-\lambda(m).$$

于是奇偶通道具有精确交叉转移。若所有不超过 z 的素因子均已处理，而

$$z\geq X^{1/3},$$

则区间 $[3,X]$ 中仍位于奇乘法深度通道的真实幸存者必为素数。由此得到奇通道立方根认证。进一步，在

$$z\geq X^{1/4}$$

层，奇通道真实幸存者只能属于乘法深度 1 或 3。

这些更浅认证层并不自动给出固定和值纤维的正下界，因为固定和值需要的是二点反射相关：

$$\boxed{R_f(N)=\sum_x f(x)f(N-x)=\langle f,J_N f\rangle.}$$

有限模边际信息、总数或简单奇偶比例都不能一般地恢复这一反射配对。关系筛的价值因此不是把关系进一步压扁，而是精确保存反射相位。

本篇后半部把固定和值完整展开为终端饱和型关系筛。对原子序列

$$A=\{a_1<a_2<\cdots\},$$

定义有限关系母体

$$\Gamma_k=\{\{a_i,a_j\}:1\leq i\leq j\leq k\},$$

固定和值支撑

$$S_k = A_k \boxplus A_k,$$

以及自然终端段

$$\boxed{J_k = \{a_k + 2, \dots, a_{k+1} + 1\}.}$$

有

$$\mathbb{Z}_{\geq 3} = \bigsqcup_{k\geq 1} J_k.$$

若

$$m \in J_k,$$

则未来原子不可能再参与和值 m，所以

$$\boxed{\Gamma_\infty^{(\sigma=m)} = \Gamma_k^{(\sigma=m)}.}$$

固定和值由此获得有限终端。

对每个终端目标 m，定义全部无序关系槽

$$\mathcal{S}_m = \{\{a, b\} : a + b + 1 = m,\ 1 \leq a \leq b\}.$$

终端后每个端点只有原子 A 或乘法占位 $\mathcal{M}$ 两种身份，因此

$$\boxed{\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m^{AA} \sqcup \mathcal{S}_m^{A\mathcal{M}} \sqcup \mathcal{S}_m^{\mathcal{M}\mathcal{M}}.}$$

定义

$$\hat{\alpha}(a) = \mathbf{1}_A(a) = \alpha(\Phi(a)), \qquad \hat{\beta}(a) = 1 - \hat{\alpha}(a),$$

逐槽恒有

$$\boxed{\hat{\alpha}(a)\hat{\alpha}(b) = \hat{\alpha}(a) + \hat{\alpha}(b) - 1 + \hat{\beta}(a)\hat{\beta}(b).}$$

若

$$H(m) = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$$

为全部无序槽数，

$$G(m) = \#\mathcal{S}_m^{AA},$$

$$X(m) = \#\mathcal{S}_m^{A\mathcal{M}},$$

$$C(m) = \#\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}\mathcal{M}},$$

则

$$\boxed{H(m) = G(m) + X(m) + C(m).}$$

双乘法槽又可按两个端点的最小素因子责任精确分解：

$$\mathcal{M} = \bigsqcup_{p} E_p, \qquad C(m) = \sum_{p,q} C_{p,q}\,(m).$$

固定和值关系由此被完整组织成有限、无遗漏的终端关系几何。

本篇最终建立一套标准关系筛工具链：

$$\boxed{\mathsf{B} \to \mathsf{P} \to \tau \to \mathsf{H} \to \mathsf{F} \to \mathsf{O} \to \mathsf{C} \to \mathsf{Sat},}$$

分别表示出生、投影、终端、缺口、第一缺口、机会、证书与饱和。

它们把“筛”从整数位置的删除过程提升为关系纤维的完整保存、有限控制与终端判定。

关键词： 有限控制几何；乘法深度张量；原子顶点；关系轨道；局部阻塞；局部许可；CRT 生存树；首次局部淘汰；真实死亡；关系字母表；关系保真筛；奇偶双通道；终端饱和；自然终端段；加乘精准补位

第一部　有限控制几何

第一章　从关系语言进入控制几何

第三篇把任意有限素数关系写成

$$R_\Theta(x) = \mathcal{B}_\Theta(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \dots, \boldsymbol{I}(f_r(x;\Theta))).$$

这一定义回答：

> 一个关系读取哪些位置，怎样组合这些位置的身份？

本篇进一步固定一个有限控制深度，考察乘法结构怎样作用于整条关系。

这里必须避免一个常见误解。

一个素数 q 能整除某个端点，并不等于“这个关系整体被 q 删除”。

只有当关系谓词要求该端点为素数，而且该端点确实是大于 q 的 q 倍数时，这个关系实例才在 q 层失去全素数身份。

因此，控制几何的对象不是单纯的“被筛整数”，而是：

带关系位置的有限端点组.

第二章　任意有限阶关系空间

记正奇数集合为

$$\mathbb{O}_{\geq 3} = \{3,5,7,\dots\}.$$

对关系阶数 $r \geq 1$，定义

$$\boxed{\mathcal{X}_r = \mathbb{O}_{\geq 3}^{r}.} \tag{2.1}$$

其中一个点

$$x = (x_1, \dots, x_r)$$

表示一个有序 r 端关系实例。

若问题使用无序端点，可以再除以相应置换对称；底层控制结构不变。

2.1　素数间隔单元

设奇素数依次为

$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots.$$

定义一维素数间隔单元

$$\boxed{I_n = \{p_n, p_n + 2, \dots, p_{n+1}\}.} \tag{2.2}$$

对多重指标

$$\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_r),$$

定义高维关系单元

$$\boxed{\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}} = I_{i_1} \times \cdots \times I_{i_r}.} \tag{2.3}$$

于是

$$\boxed{\mathcal{X}_r = \bigcup_{\boldsymbol{i}} \mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}.} \tag{2.4}$$

这给关系空间一个天然的有限单元分解。

第三章　乘法深度张量

对整数 $n > 1$，$\Omega(n)$ 表示按重数计的素因子总数。

定义

$$\boxed{\Delta_r(x_1, \dots, x_r) = (\Omega(x_1), \dots, \Omega(x_r)).} \tag{3.1}$$

它记录每个端点的乘法深度。

当全部端点都是奇素数时：

$$\Omega(x_j) = 1 \quad (1 \le j \le r).$$

因此定义原子顶点骨架

$$\boxed{\mathcal{V}_r = \Delta_r^{-1}(1, \dots, 1).} \tag{3.2}$$

显然：

$$\boxed{\mathcal{V}_r = \mathbb{P}_{\text{odd}}^{r}.} \tag{3.3}$$

所以：

任意有限阶同时素数关系， 都是同一个乘法深度场中的原子顶点关系。

(3.4)

第四章　顶点、边、面与浅乘法深度

在单元

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}$$

中，若一个坐标恰位于素数端点，则该坐标的乘法深度为 1。

若某坐标严格处于两个连续素数之间，则它是奇合数，所以对应深度大于 1。

因此：

关系单元中的位置	乘法深度结构
原子顶点	$(1,\dots,1)$
边内部	至少一个分量 >1
二维面内部	至少两个分量 >1
⋮	⋮

(4.1)

素数与浅层 almost-prime 因而不需要两套关系空间。

若允许的深度集合为

$$B \subseteq \mathbb{N}^r,$$

则目标区域只是

$$\boxed{\Delta_r^{-1}(B).} \tag{4.2}$$

全素数关系对应

$$B = \{(1,\dots,1)\}.$$

第五章　关系轨道

设参数空间为

$$\mathcal{U}.$$

给定映射

$$\boxed{F = (F_1, \dots, F_r) : \mathcal{U} \to \mathcal{X}_r.} \tag{5.1}$$

定义其像

$$\boxed{\Gamma_F = F(\mathcal{U}).} \tag{5.2}$$

称为**关系轨道**。

根据 F 的形式，关系轨道可以是：

- 固定和值反射线；
- 固定差平移线；
- 仿射子空间；
- 有限模板平移轨道；
- 多项式曲线；
- 指数稀疏轨道；
- 等差链族；
- 区间与窗口族；
- 完整因子身份块。

统一的是它们都进入同一固定身份谱和同一乘法深度场。

第六章　原子顶点预像定理

定理 6.1

对关系映射

$$F = (F_1, \dots, F_r),$$

有

$$\boxed{\{t \in \mathcal{U} : F_1(t), \dots, F_r(t) \text{ 全为奇素数}\} = F^{-1}(\mathcal{V}_r).} \tag{6.1}$$

证明

由

$$\mathcal{V}_r = \Delta_r^{-1}(1, \dots, 1)$$

可知：

$$F(t) \in \mathcal{V}_r$$

当且仅当

$$\Omega(F_j(t)) = 1$$

对所有 j 成立。

这恰好表示所有 $F_j(t)$ 都为奇素数。证毕。

更一般地：

$$\boxed{\{t : \Delta_r(F(t)) \in B\} = F^{-1}(\Delta_r^{-1}(B)).} \tag{6.2}$$

这就是关系轨道与乘法深度场之间的严格接口。

第七章　有限控制深度

固定实数

$$z \geq 2.$$

定义控制素数集

$$\boxed{\mathcal{P}(z) = \{q \in \mathbb{P} : q \leq z\}.} \tag{7.1}$$

以及 primorial

$$\boxed{P(z) = \prod_{q \leq z} q\,.} \tag{7.2}$$

有限控制深度 z 的作用是：

> 只使用不超过 z 的素数乘法层，对关系端点进行有限身份读取。

它不是终端深度的同义词。

若端点可能很大，则 z 可能只是预筛层；若

$$z \geq \sqrt{X},$$

则对所有不超过 X 的端点，它成为完整素性终端层。

第八章　相位周期与有限控制周期

对固定有限控制层 $\mathcal{P}(z)$，每个整除条件

$$q \mid n$$

只依赖

$$n \bmod q.$$

因此全部局部相位共同在模

$$\boxed{W_z = \prod_{\substack{3\le q\le z\\ q\in\mathbb{P}}} q} \tag{8.1}$$

上重复。

若在奇数原子坐标中读取，则普通整数轴上的完整周期相应为 $2W_z$。

这里要区分两种“接缝”：

相位接缝：有限控制层重新回到同一余类相位;

生成接缝：新的控制素数在自身平方尺度开始具有独占最小因子作用.

二者分别回答：

> 什么时候回到同相位？

以及：

> 什么时候增加一个新的真实控制层？

图 4-01　有限控制几何总图

控制对象不是单个整数，而是带关系位置的有限端点组；乘法深度场把原子顶点、浅层 almost-prime 与一般关系轨道放进同一有限几何。

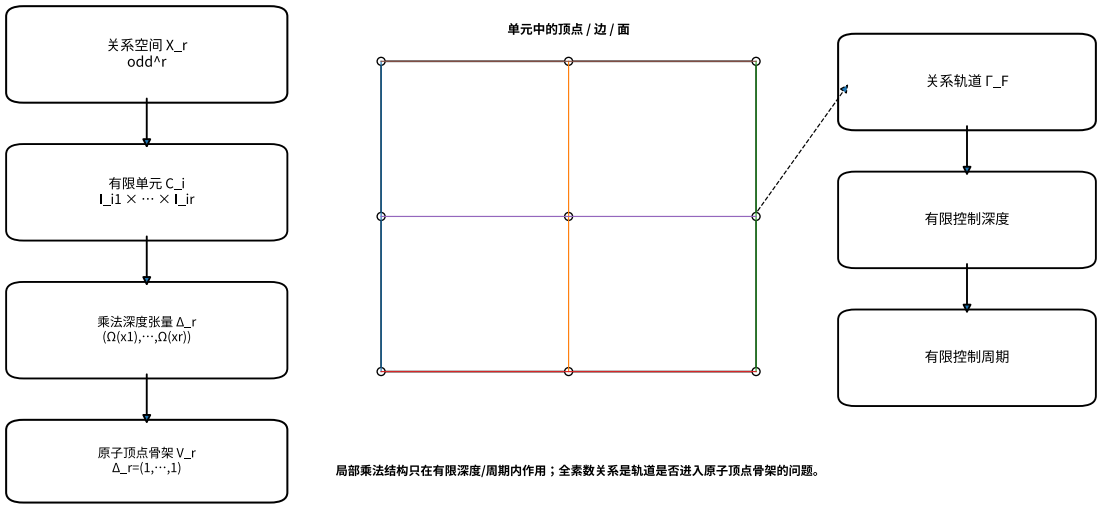


图 4-01　有限控制几何总图。 有限控制几何把带关系位置的 r-端对象放入 $\mathcal{X}_r = \mathbb{O}_{\geq 3}^{r}$，再用素数间隔单元分解空间、以乘法深度张量 Δ_r 标记端点深度，并把全素数关系识别为原子顶点骨架 $\mathcal{V}_r = \Delta_r^{-1}(1,\dots,1)$。关系轨道、有限控制深度与有限控制周期随后在同一几何中工作。

第二部　局部阻塞与许可

第九章　局部阻塞的统一定义

对关系轨道

$$F = (F_1, \dots, F_r)$$

和素数 ℓ，定义

$$\boxed{B_\ell(F) = \left\{ t \bmod \ell : \prod_{j=1}^{r} F_j(t) \equiv 0 \pmod{\ell} \right\}.} \tag{9.1}$$

它表示：

> 在模 ℓ 的参数位置中，至少有一个关系端点落入 ℓ 的整除类。

若

$$B_\ell(F)$$

覆盖全部参数余类，则无论参数如何选择，都至少有一个端点被 ℓ 整除。

因此：

> **局部阻塞就是某个乘法原子的整除射线族完全覆盖关系参数空间。**

(9.2)

第十章　局部许可不等于整体占据

若对每个素数 ℓ 都不存在完全覆盖，则称关系轨道通过**局部许可**。

这只说明：

不存在一个单独的有限模乘法结构把整条关系轨道永久封死。

(10.1)

它不自动推出：

关系轨道实际进入原子顶点骨架。 (10.2)

因此必须严格区分：

局部许可　　与　　整体占据. (10.3)

前者是局部必要条件；

后者是全局关系事实。

第十一章　有限偏移模板的局部指纹

给定有限偏移模板

$$\boxed{H = \{h_1, \dots, h_k\}.} \tag{11.1}$$

对应关系

$$n \mapsto (n + h_1, \dots, n + h_k).$$

对素数 q，定义模板在模 q 下占据的不同余类数

$$\boxed{\nu_H(q) = \#\{h \bmod q : h \in H\}.} \tag{11.2}$$

定义允许余类数

$$\boxed{\nu_H(q) = q - \nu_H(q).} \tag{11.3}$$

若

$$\nu_H(q) = q,$$

则 H 覆盖全部模 q 余类。

于是对任意 n，至少有一个

$$n + h$$

被 q 整除。

若该端点大于 q，它必为合数。

所以：

$$\boxed{\nu_H(q) = q \Rightarrow \text{全素数模板只有可能出现有限边界例外.}} \tag{11.4}$$

边界例外来自某个被 q 整除的端点恰好等于 q 本身。

图 4-02　局部阻塞指纹

模板 H 在模 q 下占据的偏移余类决定禁止相位；允许余类数 v_H(q)=q-v_H(q)。

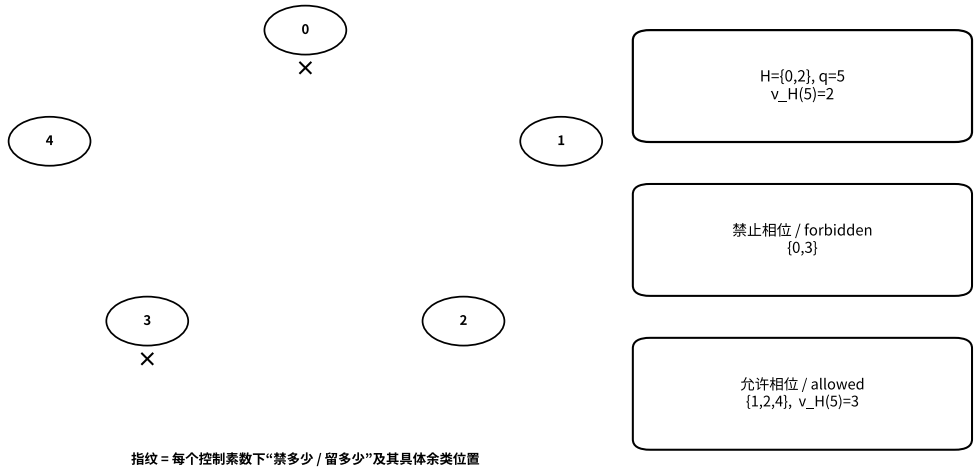


图 4-02　局部阻塞指纹。 对有限偏移模板 H 与素数 q，模板占据的不同余类数为 $\nu_H(q)$，允许余类数为 $\nu_H(q) = q - \nu_H(q)$。图以 $H = \{0,2\}, q = 5$ 为例，禁止起点相位为 $\{0,3\}$，存活相位为 $\{1,2,4\}$。局部指纹保存的不只是数量，还包括具体余类位置。

第十二章　模板局部许可

定义 12.1

若对所有素数 q 都有

$$\boxed{\nu_H(q) < q,} \tag{12.1}$$

则称模板 H 通过局部许可。

这与经典 admissibility 的内容一致，但本书直接把它解释为：

$$\boxed{\text{没有任何一个最小乘法层能够单独覆盖全部平移位置。}} \tag{12.2}$$

定理 12.2　有限检查定理

若

$$q > |H|,$$

则

$$\nu_H(q) \le |H| < q.$$

因此要判断有限模板是否存在完全局部覆盖，只需检查

$$\boxed{q \le |H|.} \tag{12.3}$$

证明

模板至多含 $|H|$ 个不同偏移，因此模 q 下至多占据 $|H|$ 个不同余类。

若 $q > |H|$，不可能覆盖全部 q 个余类。证毕。

第十三章　一个被完全阻塞的模板

考虑

$$H = \{0,2,4\}.$$

模 3：

$$0,\ 2,\ 1$$

恰好覆盖全部三个余类。

所以：

$$\nu_H(3) = 3.$$

任意整数 n 中，

$$n,\ n+2,\ n+4$$

至少一个被 3 整除。

除有限边界情形外，不可能三者同时为素数。

因此：

$$\boxed{H = \{0,2,4\}}$$

是一个最简单的完全局部阻塞实例。

第十四章　等差模板的局部容量

考虑

$$H_{k,d} = \{0, d, 2d, \dots, (k-1)d\}.$$

固定素数 $q \le k$。

若

$$q \nmid d,$$

则 d 在模 q 中可逆，前 q 个项已经遍历全部模 q 余类。

因此

$$\nu_{H_{k,d}}(q) = q.$$

所以若一个固定等差模板要通过所有

$$q \le k$$

的局部许可，必须有：

$$\boxed{q \mid d \qquad \text{对每个素数 } q \le k.} \tag{14.1}$$

因此最小自然公共步长包含：

$$\boxed{W_k = \prod_{q \le k} q\,.} \tag{14.2}$$

这与第三篇 Green–Tao 等差链的步长必要条件相接。

图 4-03　完全阻塞模板 vs 局部许可模板

局部许可是确定性的有限模条件，不是概率概念：要么存在一个素数层完全覆盖全部相位，要么每个素数层都至少留下一个相位。

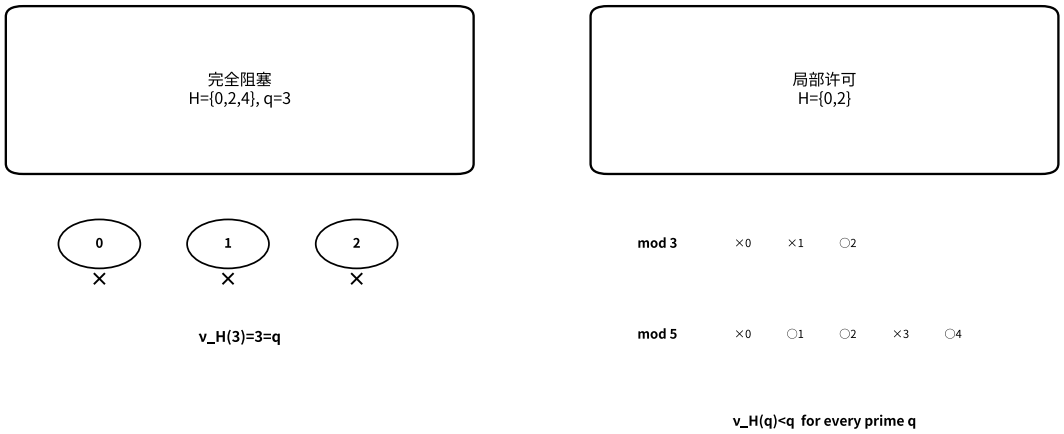


图 4-03　完全阻塞模板 vs 局部许可模板。 模板 $H = \{0,2,4\}$ 在模 3 下覆盖全部三个余类，因此被一个有限模层完全阻塞；模板 $H = \{0,2\}$ 则在模 3、模 5 等层均保留至少一个允许相位。局部许可是确定性的有限模条件，它只排除单个小素数层永久封死整个模板，并不等于整体原子占据。

第十五章　有限轮局部容量

对有限控制素数集合 S，若模板在每个 $q \in S$ 下仍有

$$v_H(q) > 0,$$

则中国剩余定理给出模

$$M_S = \prod_{q \in S} q$$

的允许起点类数：

$$\boxed{\rho_H(S) = \prod_{q \in S} v_H(q).} \tag{15.1}$$

这一数值精确描述：

> 在指定有限乘法层下，有多少相位类没有被局部整除条件完全排除。

但它仍然不是最终素数关系数。

因为局部许可位置中可能包含由更大素因子构成的合数端点。

第三部　CRT 生存树与首次局部淘汰

第十六章　从有限容量到 CRT 生存树

第十五章得到：

$$\rho_H(S) = \prod_{q\in S} v_H(q).$$

这给出有限控制层下的联合允许相位数。

但一个乘积只告诉我们最后剩下多少相位，并没有告诉我们：

> 每一层怎样分叉？哪些参数一直存活？哪些参数第一次在哪一层失去局部许可？

中国剩余定理可以把这些问题全部写成一棵精确的有限树。

16.1　逐层控制模数

取互不相同的控制素数

$$\boxed{p_1 < p_2 < \cdots < p_s.} \tag{16.1}$$

定义

$$\boxed{W_i = \prod_{j=1}^{i} p_j, \qquad W_0 = 1.} \tag{16.2}$$

对模板

$$H = \{h_1, \dots, h_k\},$$

定义第 i 层联合存活余类集

$$\boxed{A_i(H) = \{a \bmod W_i : a + h \not\equiv 0 \pmod{p_j} \text{ 对所有 } h \in H,\ 1 \le j \le i\}.} \tag{16.3}$$

约定：

$$A_0(H) = \{0\}.$$

16.2　存活父节点的精确分叉

固定：

$$a \bmod W_{i-1} \in A_{i-1}(H).$$

它在模

$$W_i = W_{i-1}p_i$$

下有恰好 p_i 个子余类。

由于 W_{i-1} 与 p_i 互素，这 p_i 个子类在模 p_i 下恰好遍历全部余类。

模板 H 在模 p_i 下占据

$$v_H(p_i)$$

个禁止余类，因此恰有

$$\boxed{v_H(p_i) = p_i - v_H(p_i)} \tag{16.4}$$

个子类继续存活。

所以：

$$\boxed{\text{每个存活父节点} \to p_i \text{ 个子节点,}}$$

其中：

$$\boxed{v_H(p_i) \text{ 个存活,} \qquad v_H(p_i) \text{ 个在本层首次失去局部许可.}} \tag{16.5}$$

定理 16.1　CRT 生存树计数公式

对每个 $i \geq 1$，

$$\boxed{|A_i(H)| = \prod_{j=1}^{i}\big(p_j - v_H(p_j)\big) = \prod_{j=1}^{i} v_H(p_j).} \tag{16.6}$$

证明

第 0 层只有一个根节点。

第 $j-1$ 层的每个存活节点在第 j 层恰产生

$$v_H(p_j)$$

个存活子节点。

逐层相乘即得。证毕。

16.3　生存比例

总相位数为：

$$W_i = \prod_{j=1}^{i} p_j.$$

因此：

$$\boxed{\frac{|A_i(H)|}{W_i} = \prod_{j=1}^{i}\left(1 - \frac{v_H(p_j)}{p_j}\right).} \tag{16.7}$$

定义：

$$\boxed{\eta_j = 1 - \frac{v_H(p_j)}{p_j}.} \tag{16.8}$$

则：

$$\boxed{\frac{|A_i(H)|}{W_i} = \prod_{j=1}^{i} \eta_j .} \tag{16.9}$$

η_j 是第 j 个有限控制层对每个既有存活父节点的精确子节点存活比例。

16.4 完全阻塞就是整棵树终止

若某个 p_i 满足：

$$v_H(p_i) = p_i,$$

则：

$$v_H(p_i) = 0.$$

于是：

$$\boxed{A_i(H) = \varnothing.}$$

所有后续层也为空。

因此：

局部完全阻塞，就是 CRT 生存树在某一有限层整棵终止。 (16.10)

反过来，只要所有已加入层都满足

$$v_H(p_i) > 0,$$

有限树就始终存在存活枝。

这些枝表示有限局部相位仍被允许；真实整数端点的终端身份还要继续进入真实死亡层。

图 4-04　CRT 生存树

示例模板 H={0,2}：先施加模 3 局部许可，再施加模 5；CRT 将存活相位精确提升到模 15。

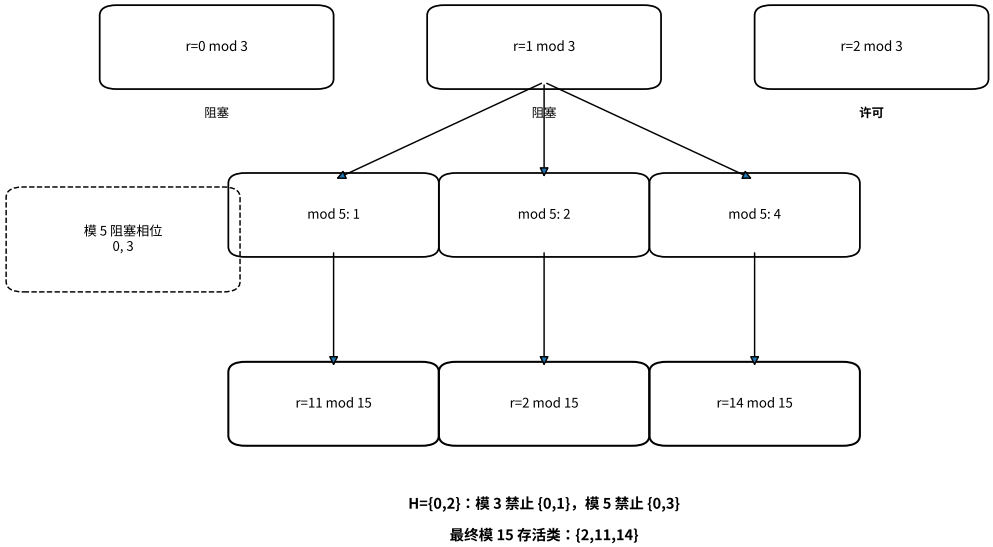


图 4-04　CRT 生存树。 示例模板 $H = \{0,2\}$ 先通过模 3 局部许可，再通过模 5 局部许可。中国剩余定理将各层存活相位无损提升到模 15 的存活类 $\{2,11,14\}$，形成有限层精确生存树。

第十七章　首次局部淘汰守恒

CRT 生存树不仅计数最终存活枝，还能把全部模 W_s 参数相位按“第一次失败发生在哪一层”做成精确分区。

17.1　首次局部淘汰集

固定最终控制层 s。

定义：

$$\boxed{F_i(H)=\left\{a \bmod W_s:\begin{matrix} a \text{ 在 } p_1,\dots,p_{i-1} \text{ 层全部存活,} \\ a \text{ 在 } p_i \text{ 层第一次失败} \end{matrix}\right\}.} \tag{17.1}$$

把最终联合存活集提升到模 W_s 后仍记为：

$$A_s(H).$$

于是：

$$\boxed{\mathbb{Z}/W_s\mathbb{Z}=A_s(H)\sqcup F_1(H)\sqcup\cdots\sqcup F_s(H).} \tag{17.2}$$

每个参数相位要么穿过全部已加入控制层，要么存在唯一的首次局部淘汰层。

17.2　首次淘汰的精确计数

在前 $i-1$ 层存活的比例为：

$$\prod_{j<i}\eta_j.$$

在第 i 层失败的比例为：

$$1-\eta_i=\frac{\nu_H(p_i)}{p_i}.$$

因此：

$$\boxed{|F_i(H)|=W_s(1-\eta_i)\prod_{j<i}\eta_j\,.} \tag{17.3}$$

而最终存活数为：

$$\boxed{|A_s(H)|=W_s\prod_{i=1}^{s}\eta_i\,.} \tag{17.4}$$

定理 17.1　首次局部淘汰守恒

有：

$$\boxed{1=\prod_{i=1}^{s}\eta_i+\sum_{i=1}^{s}(1-\eta_i)\prod_{j<i}\eta_j\,.} \tag{17.5}$$

等价地：

$$\boxed{W_s = |A_s(H)| + \sum_{i=1}^{s} |F_i(H)|.} \tag{17.6}$$

证明

由互不重叠分区

$$\mathbb{Z}/W_s\mathbb{Z} = A_s(H) \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{s} F_i(H)$$

直接得到计数恒等式。

除以 W_s，再代入式 (17.3) 与 (17.4)，得到式 (17.5)。证毕。

17.3 从相位 first-killer 到整数 first-killer

式 (17.5) 可以读成：

$$\boxed{\text{全部参数相位} = \text{联合存活} + \text{各层首次局部淘汰.}} \tag{17.7}$$

这比最终生存比例多保存了一项关键信息：

$$\boxed{\text{失败第一次发生在哪里。}}$$

因此，CRT 生存树已经具有一个相位级 first-killer。

但相位级 first-killer 与真实整数死亡仍然属于两个不同层次：

- 首次局部淘汰记录某个参数余类第一次触发小素数整除；
- 真实死亡记录具体整数的唯一最小素因子；
- 关系 first-killer 再把若干端点的真实死亡汇总成关系级首次责任。

于是有限控制链完整成为：

$$\boxed{\text{局部许可} \to \text{CRT 生存树} \to \text{首次局部淘汰} \to \text{真实死亡} \to \text{关系 first-killer.}} \tag{17.8}$$

图 4-05　首次局部淘汰守恒

模 W_s 的每个参数相位恰有一种终局：最终存活，或在唯一第 i 层第一次失败。

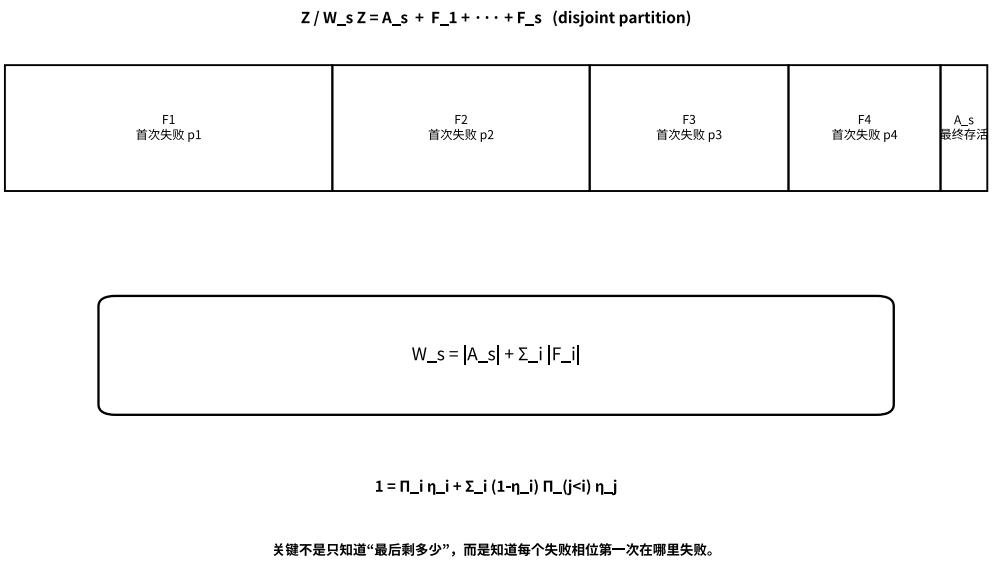


图 4-05　首次局部淘汰守恒。 固定最终控制层 s 后，模 W_s 的全部参数相位被精确分成最终联合存活集 $A_s(H)$ 与各层首次淘汰集 $F_i(H)$。因此 $W_s = |A_s(H)| + \sum_i |F_i(H)|$。这一分账比只保存最终生存比例更强，因为它记录每个失败相位第一次在哪一层失败。

第四部　真实死亡、关系字母表与关系保真筛

第十八章　普通整除与真实死亡

若一个奇合数

$$n$$

同时被多个素数整除，那么普通筛会在多个层重复命中它。

为了得到唯一关系履历，必须指定第一次真正确定它为合数的素数层。

定义：

$$\boxed{\kappa(n) = P^{-}(n).} \tag{18.1}$$

定义 18.1　真实死亡层

对奇素数 q，定义

$$\boxed{D_q = \{n \text{ 为奇合数}: P^{-}(n) = q\}.} \tag{18.2}$$

于是：

$$\boxed{D_q \cap D_r = \varnothing \qquad (q \neq r).} \tag{18.3}$$

所有奇合数恰好进入一个 D_q。

因此：

$$\boxed{\text{每个奇合数只在它的最小素因子层真实死亡一次。}} \tag{18.4}$$

第十九章　关系 first-killer

对一个全素数型有限关系实例

$$R = (n_1, \dots, n_r),$$

若至少有一个端点为合数，定义：

$$\boxed{\kappa(R) = \min\{P^-(n_j) : n_j \text{ 为合数}\}.} \tag{19.1}$$

称其为关系的**第一责任素数**。

若所有端点均为素数，则：

$$\kappa(R) = \infty.$$

于是一个候选关系只有两种终端结果：

$$\boxed{\begin{cases} \kappa(R) < \infty, & \text{在唯一 first-killer 层真实死亡;} \\ \kappa(R) = \infty, & \text{全部端点为原子.} \end{cases}} \tag{19.2}$$

这给关系筛一个无重叠的死亡账本。

图 4-06　真实死亡与关系 first-killer

元素级真实死亡由最小素因子唯一负责；关系 first-killer 取全部合数端点责任素数中的最小者。

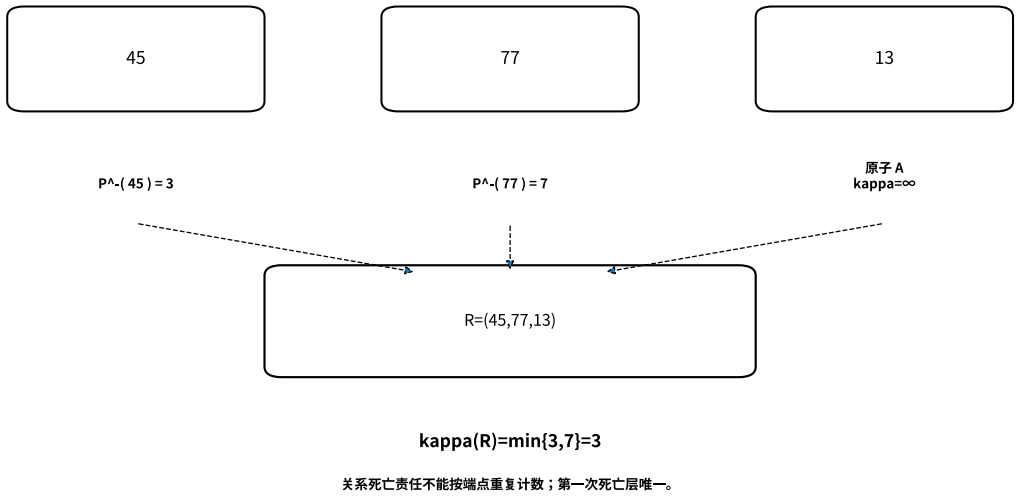


图 4-06　真实死亡与关系 first-killer。 元素级真实死亡由最小素因子 $P^-(n)$ 唯一负责。对于候选关系 $R = (n_1, \dots, n_r)$，关系 first-killer 定义为所有合数端点最小素因子的最小值；若全部端点为素数，则 $\kappa(R) = \infty$。因此关系死亡也具有唯一的第一次责任层。

第二十章　关系字母表

关系 first-killer 记录一条候选关系第一次在哪里失败。

终端以后还可以继续问：

> 一类关系究竟可能落入哪些身份组合？

这形成一个有限的关系字母表。

20.1　端点身份字母

定义粗终端身份映射：

$$\boxed{\iota(n)=\begin{cases}A, & n\text{ 为原子;}\\ \mathcal{M}, & n\text{ 为乘法占位;}\\ \partial, & n\text{ 不属于当前关系的合法正整数域.}\end{cases}} \tag{20.1}$$

若需要保存最小素因子责任，再定义：

$$\boxed{\iota^{\sharp}(n)=\begin{cases}A, & n\in A;\\ \mathcal{M}_q, & P^{-}(n)=q;\\ \partial, & n\text{ 越出合法域.}\end{cases}} \tag{20.2}$$

20.2　关系身份字

对一个 r-端关系实例

$$R=(n_1,\dots,n_r),$$

定义：

$$\boxed{\omega(R)=(\iota(n_1),\dots,\iota(n_r)).} \tag{20.3}$$

细身份字为：

$$\boxed{\omega^{\sharp}(R)=(\iota^{\sharp}(n_1),\dots,\iota^{\sharp}(n_r)).} \tag{20.4}$$

给定关系族 $\mathcal{R}$，定义终端关系字母表：

$$\boxed{\Sigma_{\mathcal{R}}=\{\omega(R):R\in\mathcal{R}\}.} \tag{20.5}$$

细字母表为：

$$\boxed{\Sigma_{\mathcal{R}}^{\sharp}=\{\omega^{\sharp}(R):R\in\mathcal{R}\}.} \tag{20.6}$$

所以：

关系字母表，就是一类关系全部可能终端身份组合的有限语言。

(20.7)

20.3　固定和值的粗字母表

固定和值使用无序二端槽。

在合法正奇数端点内部，粗终端类型只有：

$$\boxed{AA,\qquad A\mathcal{M},\qquad \mathcal{M}\mathcal{M}.} \tag{20.8}$$

其中：

$$A\mathcal{M}$$

同时包含有序表示中的

$$A\mathcal{M}\quad 与\quad \mathcal{M}A.$$

因此：

$$\boxed{\Sigma_{\mathrm{sum}}=\{AA,A\mathcal{M},\mathcal{M}\mathcal{M}\}.} \tag{20.9}$$

第七部的加乘精准补位，正是对这三个终端字的完整计数。

20.4 Twin 单平方视界的净化字母表

对单位差关系：

$$(n,n+2),$$

若它已经逃过全部旧控制素数，而当前最后控制素数为 $r>2$，则一个旧双逃逸关系在当前平方视界中的终端类型只能是：

$$\boxed{AA,\qquad \mathcal{M}_rA,\qquad A\mathcal{M}_r.} \tag{20.10}$$

不能出现：

$$\mathcal{M}_r\mathcal{M}_r,$$

因为这会要求：

$$r\mid n,\qquad r\mid n+2,$$

从而：

$$r\mid 2,$$

与 $r>2$ 矛盾。

所以这一净化层的关系字母表为：

$$\boxed{\Sigma_{\mathrm{Twin}}^{(r)}=\{AA,\mathcal{M}_rA,A\mathcal{M}_r\}.} \tag{20.11}$$

这里的限定条件十分重要：它描述的是“旧双逃逸 + 当前单层净化”后的字母表，而不是所有相差 2 的整数对的全局粗字母表。

20.5 关系字母表与关系保真

关系字母表连接：

$$\boxed{\text{端点身份}\rightarrow\text{关系终端类型}\rightarrow\text{可执行状态}.}$$

因此关系保真压缩至少必须满足：

目标命题所依赖的不同关系身份字不能被不可逆地合并。

(20.12)

它直接服务于：

- 真实死亡账本；
- 固定和值槽分类；
- 一般有限模板；
- 完整因子身份关系；
- RSL 的有限状态输出。

图 4-07　关系字母表

终端身份字母先编码原子 / 乘法身份；细化字母再保留最小素因子责任。

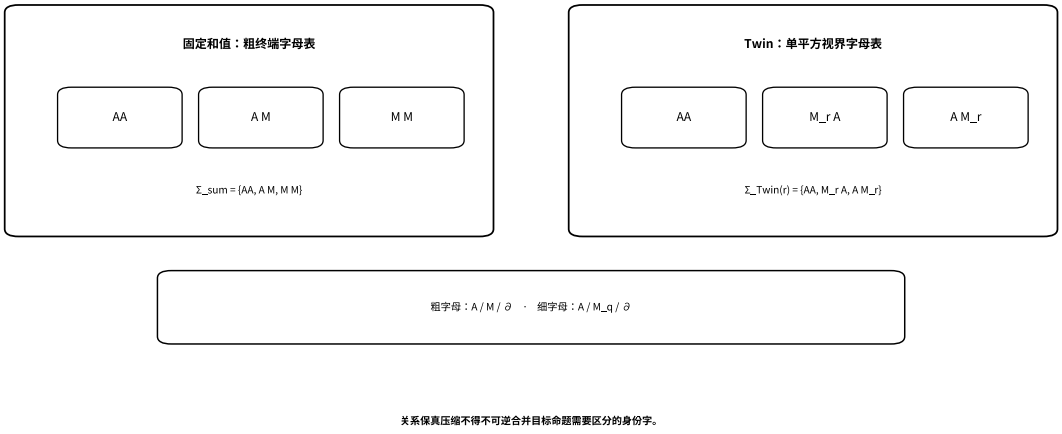


图 4-07　关系字母表。 粗端点身份字为 $A, \mathcal{M}, \partial$，细身份字进一步保存最小素因子责任 $\mathcal{M}_q$。固定和值的粗终端字母表为 $\{AA, A\mathcal{M}, \mathcal{M}\mathcal{M}\}$；Twin 在“旧双逃逸 + 当前单层净化”条件下的单平方视界字母表为 $\{AA, \mathcal{M}_r A, A\mathcal{M}_r\}$。关系保真压缩不得不可逆合并目标命题需要区分的身份字。

第二十一章　关系保真筛

定义 21.1

一个关系筛状态至少记录：

$$\boxed{\text{关系槽位置} + \text{端点} + \text{端点当前身份} + \text{first-killer} + \text{必要的出生与死亡履历}.} \tag{21.1}$$

若这些信息足以精确决定下一控制层的更新，并能区分目标命题依赖的关系身份字，则称该状态为**关系保真状态**。

关系保真不意味着永远保存所有原始数据。

它只要求：

$$\boxed{\text{任何压缩都不能删除目标命题真正依赖的关系信息。}} \tag{21.2}$$

第二十二章　为什么“剩多少”不是充分状态

固定偶数 N，定义无序关系槽

$$\mathcal{S}_N = \{(x, N-x): 3 \le x \le N/2,\ x \text{ 为奇数}\}.$$

考虑：

$$N_1 = 2006, \qquad N_2 = 2008.$$

二者都有

$$501$$

个初始槽。

处理

$$q = 3$$

后，两者都剩

$$168$$

个关系槽。

若状态只保存：

$$(H, |S_3|),$$

二者完全相同。

但继续处理

$$q = 5$$

时：

$$N_1$$

新真实删除 66 个槽，

而

$$N_2$$

新真实删除 67 个槽。

因此下一状态分别为：

$$102, \qquad 101.$$

所以：

$(H, |S_q|)$ 不能决定下一层更新。 (22.1)

这说明：

具体关系槽的位置和余类配置， 携带了标量计数无法保存的信息。

(22.2)

图 4-08　为什么“剩多少”不是充分状态

正文中的 2006/2008 例子：同样的剩余计数隐藏不同余类配置，因此下一控制层发生不同更新。

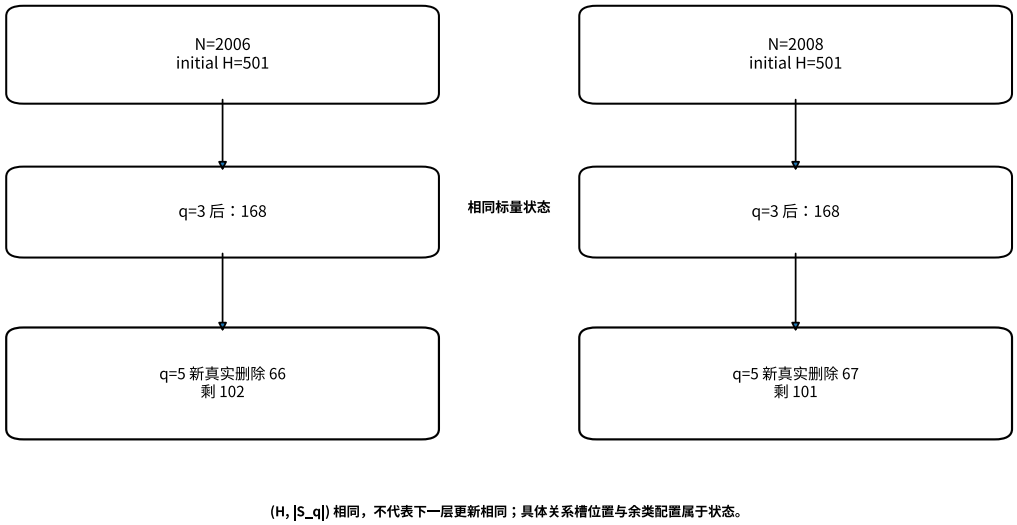


图 4-08　为什么“剩多少”不是充分状态。 固定和值关系中，$N_1 = 2006$ 与 $N_2 = 2008$ 都有 501 个初始槽；处理 $q = 3$ 后都剩 168 个槽，但到 $q = 5$ 时分别新真实删除 66 与 67 个，下一状态成为 102 与 101。因而相同的 $(H, |S_q|)$ 不足以决定下一层更新，具体槽位置与余类配置必须进入关系保真状态。

第二十三章　固定和值是二点反射相关

对任意 $0/1$ 函数 f，定义固定和值关系量

$$\boxed{R_f(N)=\sum_x f(x)f(N-x).} \tag{23.1}$$

定义反射算子：

$$\boxed{J_N f(x)=f(N-x).} \tag{23.2}$$

则：

$$\boxed{R_f(N)=\langle f, J_N f\rangle.} \tag{23.3}$$

所以固定和值不是一点统计，而是二点反射相关。

这就是为什么总数、密度或有限模边际分布一般不能决定固定和值关系。

第二十四章　有限模信息不能决定反射配对

取

$$W = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210,$$

固定：

$$N = 700.$$

考虑集合：

$$A = \{11,689\},$$

$$B = \{221,689\}.$$

因为：

$$221 = 11 + 210,$$

所以 11 与 221 在模

$$2,3,5,7$$

下具有相同余类。

因此 A, B 的有限模余类多重集相同。

但：

$$11 + 689 = 700,$$

而：

$$221 + 689 \neq 700.$$

按有序关系计数：

$$R_A(700) = 2, \qquad R_B(700) = 0.$$

因此：

有限模局部信息相同，　并不能决定指定固定和值关系。	(24.1)

关系工具若丢掉

$$x \leftrightarrow N - x$$

的具体对应相位，就必须在别处重新恢复这份信息。

第二十五章　关系筛与元素筛的分工

元素筛擅长回答：

哪些整数位置已经被乘法因子占据？

关系筛进一步回答：

这些端点在指定关系中怎样配对、怎样死亡、怎样终端？

因此形成二层结构：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{元素层}\\ \text{端点身份}\\ \Downarrow\\ \text{关系层}\\ \text{关系纤维身份}\end{array}} \tag{25.1}$$

关系筛不是另一套筛权。

它改变的是筛选对象：

$$\boxed{\text{从整数位置提升到关系纤维。}} \tag{25.2}$$

第五部　乘法深度奇偶通道

第二十六章　Liouville 奇偶身份

定义：

$$\boxed{\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}.} \tag{26.1}$$

于是：

$$\lambda(n) = -1$$

表示奇乘法深度，

$$\lambda(n) = 1$$

表示偶乘法深度。

素数属于奇深度 1。

第二十七章　真实死亡的奇偶翻转

设

$$n = qm,$$

且

$$q = P^{-}(n).$$

则：

$$\Omega(n) = 1 + \Omega(m).$$

因此：

$$\boxed{\lambda(n) = -\lambda(m).} \tag{27.1}$$

这意味着一个真实死亡层不只是删掉 n，还保留了它从余因子 m 到 qm 的乘法深度翻转。

第二十八章　奇偶双通道转移

设在控制深度 q^- 之前，真实幸存者分成：

$$O_{q^-}$$

和

$$E_{q^-},$$

分别表示奇乘法深度与偶乘法深度通道。

令

$$T_q$$

表示“乘以新的最小素因子 q”对应的真实死亡传输。

由于乘法深度奇偶翻转，有：

$$\boxed{O_q = O_{q^-} - T_q E_{q^-},} \tag{28.1}$$

$$\boxed{E_q = E_{q^-} - T_q O_{q^-}.} \tag{28.2}$$

这一结构说明：

$$\boxed{\text{真实死亡不是匿名删除；　它携带严格的乘法深度传输。}} \tag{28.3}$$

第二十九章　关系四通道

对二端关系，可以进一步区分：

$$O*O,\qquad O*E,\qquad E*O,\qquad E*E.$$

固定和值关系不再只记录“幸存/死亡”，还可以记录两个端点的乘法深度奇偶组合。

这能显著增强有限身份认证。

但它仍然不能替代具体反射关系。

图 4-09　奇偶双通道与关系四通道

真实死亡使乘法深度奇偶翻转；二端关系因此自然分成 OO、OE、EO、EE 四个通道。

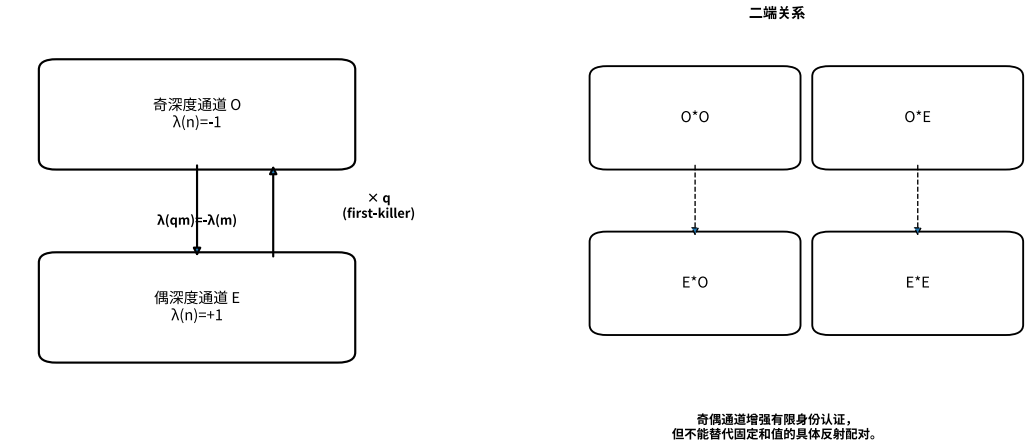


图 4-09　奇偶双通道与关系四通道。 Liouville 身份 $\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$ 把真实幸存者分成奇、偶乘法深度双通道；当新的最小素因子 q 触发真实死亡时，乘法深度奇偶翻转。二端关系因此进一步分成 $O*O, O*E, E*O, E*E$ 四个通道。该结构增强有限身份认证，但不能替代固定和值关系中的具体反射配对。

第三十章　乘法深度上界

若：

$$n \le X,$$

并且 n 的所有素因子都大于 z，则：

$$n > z^{\Omega(n)}.$$

因此：

$$\boxed{\Omega(n) < \frac{\log X}{\log z}} \tag{30.1}$$

按整数深度解释。

这给出控制深度与剩余乘法复杂度之间的直接关系。

第三十一章　奇通道立方根认证

定理 31.1

若：

$$z \geq X^{1/3},$$

且

$$3 \leq n \leq X$$

在所有不超过 z 的真实死亡层后仍然幸存，并且：

$$\lambda(n) = -1,$$

则 n 必为素数。

证明

若 n 为合数，且乘法深度为奇数，则：

$$\Omega(n) \geq 3.$$

又因所有素因子均大于 z，有：

$$n > z^3 \geq X,$$

与 $n \leq X$ 矛盾。

因此 n 只能满足：

$$\Omega(n) = 1,$$

即 n 为素数。证毕。

于是：

$$\boxed{O_z(n) = \mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n), \qquad 3 \leq n \leq X, \quad z \geq X^{1/3}.} \tag{31.1}$$

第三十二章　立方根认证与固定和值存在的层级区别

若：

$$z \geq N^{1/3},$$

则奇通道已经在区间 $[3, N]$ 上等于 prime 指示函数。

因此：

$$(O_z * O_z)(N) = (\mathbf{1}_{\mathbb{P}} * \mathbf{1}_{\mathbb{P}})(N).$$

固定和值纤维非空由下式直接读取：

$$\boxed{(O_z * O_z)(N) > 0.} \tag{32.1}$$

立方根认证解决的是：

$$\boxed{\text{谁已经确定是素数？}}$$

而固定和值存在解决的是：

$$\boxed{\text{正确的两个素数是否落在同一反射纤维？}}$$

因此：

$$\boxed{\text{更浅的 prime certification}\quad\text{不自动产生关系正下界。}} \tag{32.2}$$

第三十三章　$X^{1/4}$ 层的 P_1/P_3 分解

若：

$$z \geq X^{1/4},$$

一个真实幸存的奇乘法深度合数若存在，则其深度至少为 3，又不可能达到 5，因为：

$$n > z^5 \geq X^{5/4} > X.$$

因此奇通道只可能包含：

$$P_1 \quad 或 \quad P_3,$$

即：

$$\boxed{O_z = P_1 \sqcup P_3.} \tag{33.1}$$

对固定和值：

$$\boxed{(O_z * O_z)(N) = (P_1 * P_1)(N) + 2(P_1 * P_3)(N) + (P_3 * P_3)(N).} \tag{33.2}$$

所以：

$$(O_z * O_z)(N) > 0$$

不能直接推出：

$$(P_1 * P_1)(N) > 0.$$

预终端关系质量仍可能包含深度 3 的污染。

第三十四章　简单单调比例为什么不够

在奇偶分辨的关系状态中，自然会尝试寻找某个简单归一化量，期待它随筛层单调变化。

例如：

- Liouville 相关；
- 两端 Liouville 均值乘积；
- 2×2 奇偶关系矩阵的行列式型量；
- OO 通道比例。

这些量都不能一般地承担完整关系状态。

原因不是它们毫无信息，而是：

> **稳定结构位于关系传输和固定身份本身， 而不是某个单一比例。**

(34.1)

关系筛的主状态因此仍然必须保留关系位置。

第三十五章　从奇偶障碍到反射定位

纯 divisibility survivor 信息常常无法区分不同乘法深度奇偶。

把

$$\lambda = (-1)^{\Omega}$$

纳入状态后，乘法深度奇偶可以被显式追踪，奇通道甚至可以在立方根层完成 prime certification。

但固定和值仍然要求：

$$\boxed{\text{正确的两个 prime 必须落在同一个反射纤维中。}} \tag{35.1}$$

因此，固定和值的最终几何问题不再是：

某个端点是否已经足够像 prime,

而是：

$$\boxed{\text{具体原子位置} \leftrightarrow \text{具体反射位置} \leftrightarrow \text{具体乘法责任}} \tag{35.2}$$

的逐点耦合。

这就是固定和值的**反射定位**。

第六部　固定和值：终端饱和型关系筛

第三十六章　从一般关系筛进入固定和值

固定偶数

$$N = 2m, \qquad m \geq 3.$$

在原子坐标中，关系为：

$$\boxed{a + b + 1 = m.} \tag{36.1}$$

定义：

$$a \boxplus b = a + b + 1.$$

固定和值关系是第三篇二原子关系平面的竖直切片。

这里每个目标 m 有一个特殊性质：

> 端点自动有上界。

这使固定和值成为**终端饱和型关系筛**的典型实例。

第三十七章　母—子读出继承

设：

$$\theta:\Gamma_\infty \to Y$$

为任意关系坐标。

定义：

$$\Gamma^{(\theta=y)} = \theta^{-1}(y).$$

由于：

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots,$$

若：

$$r \in \Gamma_k^{(\theta=y)},$$

则对任何：

$$j \geq k,$$

仍有：

$$r \in \Gamma_j^{(\theta=y)}.$$

因此：

子读出继承母关系；　　读出不会重新创造关系。	(37.1)

固定和值只是取：

$$\theta = \sigma.$$

第三十八章　为什么固定和值是最低阶精确关系之一

两个奇素数

$$2a+1, \qquad 2b+1$$

满足：

$$(2a+1)+(2b+1)=2(a+b+1).$$

因此：

$$\boxed{\Phi(a)+\Phi(b)=2(a \boxplus b).} \tag{38.1}$$

固定和值同时具有三个刚性：

1. 只有两个端点；
2. 两个端点都要求精确原子深度 1；
3. 端点必须落在同一个指定和值纤维。

所以它不能只靠边际素数数量决定。

第三十九章　有限历史与固定和值支撑

记原子序列：

$$A = \{a_1 < a_2 < a_3 < \cdots\},$$

有限历史：

$$A_k = \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

定义有限二原子关系母体：

$$\boxed{\Gamma_k = \{\{a_i, a_j\}: 1 \le i \le j \le k\}.} \tag{39.1}$$

第 k 个原子出生时新增：

$$\boxed{\Lambda_k = \{\{a_i, a_k\}: 1 \le i \le k\}.} \tag{39.2}$$

定义固定和值支撑：

$$\boxed{S_k = A_k \boxplus A_k.} \tag{39.3}$$

新生关系行的和值投影为：

$$\boxed{R_k = a_k \boxplus A_k.} \tag{39.4}$$

于是：

$$\boxed{S_k = S_{k-1} \cup R_k.} \tag{39.5}$$

这就是关系支撑的逐原子增长。

第四十章　关系行平移

记：

$$h_k = a_k - a_{k-1}.$$

上一原子的历史关系行为：

$$R_{k-1}^{\text{hist}} = a_{k-1} \boxplus A_{k-1}.$$

则：

$$\boxed{a_k \boxplus A_{k-1} = h_k + (a_{k-1} \boxplus A_{k-1}).} \tag{40.1}$$

也就是说：

$$\boxed{\text{新关系行的历史部分，　是上一关系行的整体平移。}} \tag{40.2}$$

再加上自配对：

$$a_k \boxplus a_k = 2a_k + 1,$$

得到完整新生固定和值行。

第四十一章　固定和值重数递推

定义：

$$\boxed{G_k(m) = \#\Gamma_k^{(\sigma=m)}.} \tag{41.1}$$

于是第 k 个原子出生时：

$$\boxed{G_k(m) = G_{k-1}(m) + \mathbf{1}_{R_{k-1}^{\mathrm{hist}}}(m - h_k) + \mathbf{1}_{\{2a_k+1\}}(m).} \tag{41.2}$$

这条递推保留了：

$$\boxed{\text{历史累计} + \text{prime-gap 平移} + \text{新自配对}.} \tag{41.3}$$

它是固定和值重数场的精确更新式。

第四十二章　终端视界算子

对一般关系坐标

$$\theta:\Gamma_\infty \to Y,$$

定义：

$$\boxed{\tau_\theta(y) = \min\{k:\theta^{-1}(y)\cap\Gamma_\infty = \theta^{-1}(y)\cap\Gamma_k\},} \tag{42.1}$$

若最小值存在。

它只回答：

> 关于目标 y，未来是否还可能出现新关系信息？

它不回答目标纤维是否非空。

因此：

> 终端不创造存在性；　　终端只关闭未来变化。 (42.2)

第四十三章　固定和值自然终端冻结

若：

$$m \le a_{k+1} + 1,$$

任何未来原子至少为

$$a_{k+1},$$

而另一个原子至少为

$$a_1 = 1.$$

所以未来新关系的最小和值为：

$$a_{k+1} + 2 > m.$$

因此：

$$\boxed{m \le a_{k+1} + 1 \Rightarrow \Gamma_{\infty}^{(\sigma=m)} = \Gamma_{k}^{(\sigma=m)}.} \tag{43.1}$$

这就是固定和值终端冻结。

第四十四章　自然终端段

定义：

$$\boxed{J_k = \{a_k + 2, \dots, a_{k+1} + 1\}.} \tag{44.1}$$

定理 44.1　自然终端段分割

$$\boxed{\mathbb{Z}_{\geq 3} = \bigsqcup_{k\geq 1} J_k.} \tag{44.2}$$

证明

第 k 段末端为：

$$a_{k+1} + 1.$$

第 $k+1$ 段起点为：

$$a_{k+1} + 2.$$

各段相邻且不重叠。

又：

$$a_1 = 1,$$

所以第一段从 3 开始。

原子序列无界，所以这些段覆盖全部

$$\mathbb{Z}_{\geq 3}.$$

证毕。

因此：

$$\boxed{\text{每一个固定和值目标只属于一个有限历史世界。}} \tag{44.3}$$

图 4-10　固定和值自然终端段

$J_k = \{a_k + 2, \ldots, a_{k+1} + 1\}$；每个固定和值目标恰属于一个有限历史世界。

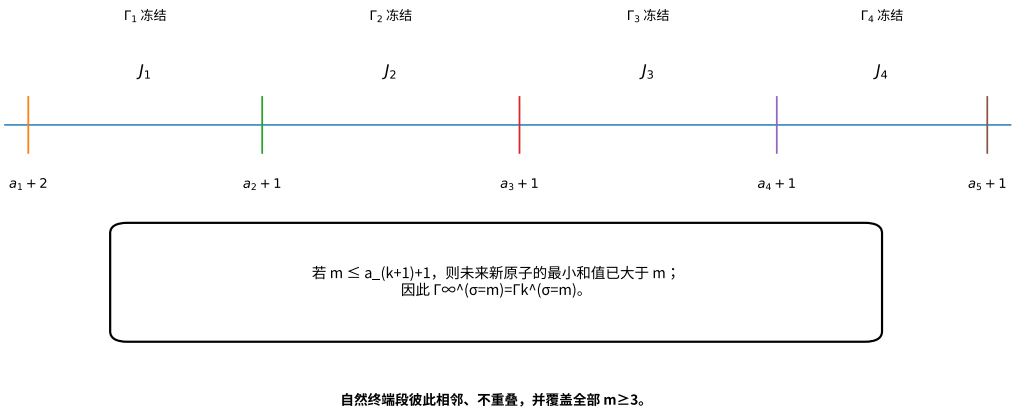


图 4-10　固定和值自然终端段。 自然终端段 $J_k = \{a_k + 2, \ldots, a_{k+1} + 1\}$ 相邻、不重叠并覆盖全部固定和值目标 $m \geq 3$。若 $m \in J_k$，则未来原子已不可能产生和值 m 的新关系，因此该纤维在第 k 层后冻结。

第四十五章　换回偶数轴：素数间隔决定终端段宽度

令：

$$p_k = 2a_k + 1.$$

若：

$$m \in J_k,$$

则：

$$N = 2m$$

属于偶数段：

$$\boxed{E_k = \{p_k + 3, p_k + 5, \dots, p_{k+1} + 1\}.} \tag{45.1}$$

并且：

$$\boxed{\{6,8,10, \dots\} = \bigsqcup_{k\geq 1} E_k.} \tag{45.2}$$

段宽满足：

$$\boxed{|E_k| = a_{k+1} - a_k = \frac{p_{k+1} - p_k}{2}.} \tag{45.3}$$

所以相邻素数 gap 直接决定新增终端目标的数量。

第四十六章　缺口与第一缺口

定义第 k 个终端段中的关系缺口：

$$\boxed{H_k = J_k \backslash S_k.} \tag{46.1}$$

若：

$$H_k = \varnothing,$$

则：

$$J_k \subseteq S_k.$$

即该终端段被固定和值关系完全占据。

若：

$$H_k \neq \varnothing,$$

定义第一缺口：

$$\boxed{F_k = \min H_k.} \tag{46.2}$$

关系筛关注的不是：

> 还有多少候选整数？

而是：

$$\boxed{\text{已经终端的关系目标中，　哪些目标仍没有真实关系见证？}} \tag{46.3}$$

第四十七章　固定和值内部的互反运动

取：

$$m \in J_k.$$

唯一写成：

$$\boxed{m = a_k + 2 + r,} \tag{47.1}$$

其中：

$$0 \le r < a_{k+1} - a_k.$$

定义历史距离云：

$$\boxed{D_k = \{a_k - a_i : 1 \le i \le k\}.} \tag{47.2}$$

若：

$$d = a_k - a_i,$$

则：

$$a_i = a_k - d.$$

要求：

$$m = a_i + a_j + 1$$

等价于：

$$a_j = r + d + 1.$$

因此：

$$\boxed{m \in A_k \boxplus A_k \Leftrightarrow (r + 1 + D_k) \cap A_k \neq \varnothing.} \tag{47.3}$$

这就是移动交点等价。

它说明：

> **固定和值不是两次独立搜索， 而是同一和值关系中的两个互反角色。**

(47.4)

第四十八章　有限关系证书

设：

$$h_k = a_{k+1} - a_k.$$

对每个：

$$r = 0, \dots, h_k - 1,$$

若选择：

$$d_r \in D_k$$

满足：

$$r + d_r + 1 \in A_k,$$

则令：

$$a_i = a_k - d_r,$$

$$a_j = r + d_r + 1.$$

有：

$$a_i + a_j + 1 = a_k + r + 2 = m.$$

对应普通素数：

$$p_i = 2a_i + 1, \qquad p_j = 2a_j + 1,$$

满足：

$$p_i + p_j = 2m.$$

所以一个完整终端段的有限证书可以由一组：

$$\boxed{\{d_r\}_{0 \le r < h_k}} \tag{48.1}$$

组成，每个 d_r 给出一个具体关系见证。

第七部　加法—乘法精准补位对象

第四十九章　位置层：原子与乘法占位的互补身份

在奇数原子坐标中，定义：

$$A = \{a: \Phi(a) \text{ 为奇素数}\},$$

$$\mathcal{M} = \{a: \Phi(a) \text{ 为奇合数}\}.$$

则：

$$\boxed{\mathbb{N}_{\geq 1} = A \sqcup \mathcal{M}.} \tag{49.1}$$

定义：

$$\alpha(n) = \mathbf{1}_A(n),$$

$$\beta(n) = \mathbf{1}_{\mathcal{M}}(n).$$

于是：

$$\boxed{\alpha(n) + \beta(n) = 1.} \tag{49.2}$$

因此：

一个自然数位置的最终身份，本来就只有乘法占位与原子余项两种互补读法。

(49.3)

第五十章　有限视界中的暂未读出状态

在有限第 k 层，定义：

$$A_k = \{a_1, \dots, a_k\},$$

$$\mathcal{M}_k = \bigcup_{i \le k} \mathcal{R}_{a_i},$$

以及：

$$\boxed{U_k = \mathbb{N}_{\ge 1} \setminus (A_k \cup \mathcal{M}_k).} \tag{50.1}$$

于是有限视界暂时具有：

$$A_k, \qquad \mathcal{M}_k, \qquad U_k.$$

但 U_k 不是第三种最终身份。

若：

$$n < a_{k+1},$$

则：

$$\boxed{U_k \cap [1, a_{k+1} - 1] = \varnothing.} \tag{50.2}$$

若：

$$m \in J_k,$$

所有固定和值槽端点均小于 a_{k+1}。

因此在该目标自己的自然终端层中：

$$\boxed{U_k \text{ 已从全部相关端点中消失。}} \tag{50.3}$$

第五十一章　固定和值只是重新配对

固定：

$$m \geq 3.$$

定义互补映射：

$$\boxed{\rho_m(a) = m - 1 - a.} \tag{51.1}$$

于是：

$$a \boxplus \rho_m(a) = m.$$

这个映射不改变端点身份。

它只做：

把两个已经具有固定身份的自然数位置，组织成同一个和值关系槽。

(51.2)

因此：

加法没有重新创造关系；固定和值只是对已有端点身份的一次关系配对读出。

(51.3)

第五十二章　关系槽耗尽定理

对任意固定和值：

$$m \geq 3,$$

定义全部无序关系槽：

$$\boxed{\mathcal{S}_m = \{\{a,b\}: a+b+1=m,\ 1 \leq a \leq b\}.} \tag{52.1}$$

终端后每个端点只有：

$$A \quad 或 \quad \mathcal{M}$$

两种身份。

因此：

$$\boxed{\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m^{AA} \sqcup \mathcal{S}_m^{A\mathcal{M}} \sqcup \mathcal{S}_m^{\mathcal{M}\mathcal{M}}.} \tag{52.2}$$

不存在第四种终端关系身份。

这就是固定和值的关系槽耗尽。

第五十三章　逐槽精准补位恒等式

由：

$$\hat{\beta}(a) = 1 - \hat{\alpha}(a), \qquad \hat{\beta}(b) = 1 - \hat{\alpha}(b),$$

逐槽有：

$$\boxed{\hat{\alpha}(a)\hat{\alpha}(b) = \hat{\alpha}(a) + \hat{\alpha}(b) - 1 + \hat{\beta}(a)\hat{\beta}(b).} \tag{53.1}$$

证明

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(a) + \hat{\alpha}(b) - 1 + \hat{\beta}(a)\hat{\beta}(b) &= \hat{\alpha}(a) + \hat{\alpha}(b) - 1 \\ &\quad +(1 - \hat{\alpha}(a))(1 - \hat{\alpha}(b)) \\ &= \hat{\alpha}(a)\hat{\alpha}(b).\end{aligned}$$

证毕。

它精确表达：

双原子槽与双乘法占位槽，是同一固定和值关系槽分解中的互补读数。

(53.2)

第五十四章　整体关系槽守恒

全部无序固定和值槽数为：

$$\boxed{H(m)=\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor.} \tag{54.1}$$

定义：

$$G(m)=\#\mathcal{S}_m^{AA},$$

$$X(m)=\#\mathcal{S}_m^{A\mathcal{M}},$$

$$C(m)=\#\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}\mathcal{M}}.$$

由关系槽耗尽：

$$\boxed{H(m)=G(m)+X(m)+C(m).} \tag{54.2}$$

若分别统计槽的左、右原子端点数：

$$L(m),\qquad R(m),$$

则：

$$L(m)+R(m)=2G(m)+X(m).$$

消去 $X(m)$ 得：

$$\boxed{G(m)=L(m)+R(m)-H(m)+C(m).} \tag{54.3}$$

这是一个精确恒等式。

图 4-11　逐槽精准补位

固定和值的每个终端槽只能属于 AA、AM 或 MM；逐槽恒等式与整体守恒把“补位”变成精确账本。

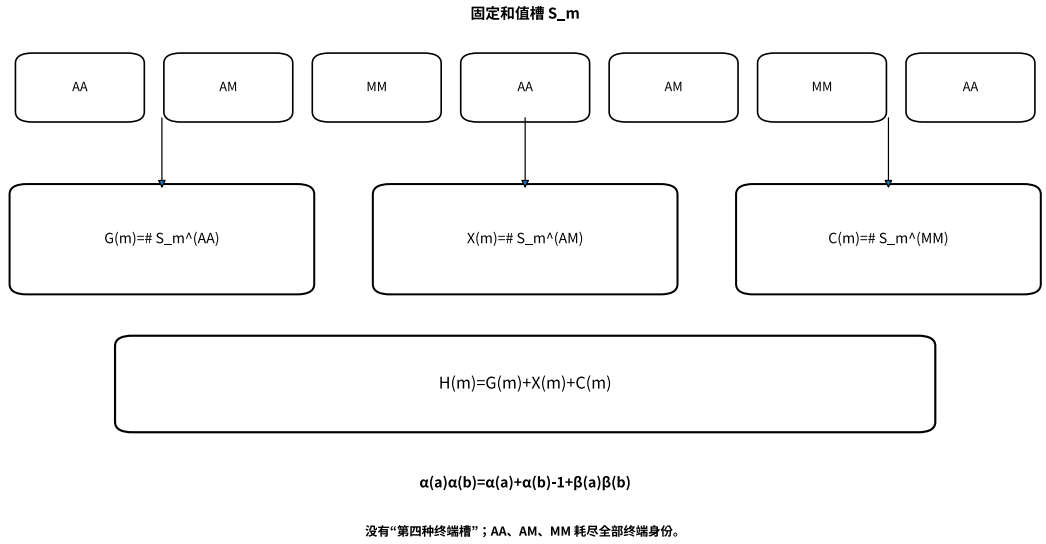


图 4-11　逐槽精准补位。 在固定和值的自然终端层，每个关系槽只能属于 AA、$A\mathcal{M}$ 或 $\mathcal{M}\mathcal{M}$ 三类，故 $H(m) = G(m) + X(m) + C(m)$。逐槽恒等式 $\hat{\alpha}(a)\hat{\alpha}(b) = \hat{\alpha}(a) + \hat{\alpha}(b) - 1 + \hat{\beta}(a)\hat{\beta}(b)$ 把双原子槽与双乘法占位槽放入同一精确分解中。

第五十五章　双乘法占位的责任分解

每个奇合数都有唯一最小素因子。

定义：

$$\boxed{E_p = \{a \in \mathcal{M} : P^-(2a+1) = p\}.} \tag{55.1}$$

则：

$$\boxed{\mathcal{M} = \bigsqcup_{p \in \mathbb{P}_{\text{odd}}} E_p.} \tag{55.2}$$

所以双乘法槽进一步分解：

$$\boxed{C(m) = \sum_{p,q} C_{p,q}(m),} \tag{55.3}$$

其中：

$$C_{p,q}(m) = \#\left\{\{a,b\} \in \mathcal{S}_m^{\mathcal{M}\mathcal{M}} : a \in E_p,\ b \in E_q\right\}.$$

若：

$$C_{p,q}(m) > 0,$$

则：

$$2a+1 = pr, \qquad 2b+1 = qs,$$

其中：

$$r \geq p, \qquad s \geq q.$$

由：

$$(2a+1) + (2b+1) = 2m$$

得到：

$$pr + qs = 2m.$$

因此：

$$\boxed{C_{p,q}(m) > 0 \Rightarrow p^2 + q^2 \leq 2m.} \tag{55.4}$$

若：

$$p = q,$$

则：

$$p(r+s) = 2m,$$

从而：

$$\boxed{C_{p,p}(m) > 0 \Rightarrow p \mid m.} \tag{55.5}$$

双乘法槽不是匿名的“失败关系”；它仍然保存清楚的乘法责任结构。

第五十六章　原子出生与独占乘法作用的时间错位

令：

$$p = 2a + 1$$

为一个新原子。

它一出生，就立即与历史原子形成新关系。

但它第一次作为某个合数的最小素因子，要到：

$$p^2.$$

在原子坐标中：

$$\boxed{\Phi^{-1}(p^2) = 2a(a+1).} \tag{56.1}$$

因此：

$$\boxed{\text{原子身份的出生，　早于它对未来乘法占位的独占作用。}} \tag{56.2}$$

关系供给与乘法反馈存在天然时间错位。

第五十七章　具体关系槽：$N=12$

取：

$$N=12,\qquad m=6.$$

全部无序原子坐标槽：

$$(1,4),\qquad (2,3).$$

其中：

$$4=1\star 1\in\mathcal{M}.$$

所以：

$$(1,4)\in A\mathcal{M}.$$

而：

$$2,3\in A.$$

所以：

$$(2,3)\in AA.$$

普通整数读出为：

$$3+9=12$$

与：

$$\boxed{5+7=12.}$$

这里不存在“先失败，再由另一组补上”。

更准确的是：

固定和值从一开始就包含不同身份槽；　　目标只读取其中的 AA 槽。	(57.1)

第五十八章　具体关系槽：$N=16, N=18, N=20, N=40$

第 57 章的 $N=12$ 展示了：

$$A\mathcal{M} \quad 与 \quad AA$$

可以在同一个固定和值中并存。

下面四个目标继续展示关系字母表怎样在具体 fiber 中展开。

58.1　$N=16$

此时：

$$m=8.$$

全部无序原子坐标槽为：

$$(1,6),\quad (2,5),\quad (3,4).$$

对应普通奇数端点：

$$(3,13),\quad (5,11),\quad (7,9).$$

身份分别为：

$$\boxed{AA,\quad AA,\quad A\mathcal{M}.}$$

因此：

$$\boxed{16=3+13=5+11.}$$

这里同一个固定和值 fiber 中同时存在两个 AA 见证。

所以固定和值不仅可以读取：

$$G(m)>0,$$

还可以进一步读取表示重数。

58.2　$N=18$

此时：

$$m=9.$$

全部无序槽：

$$(1,7),\quad (2,6),\quad (3,5),\quad (4,4).$$

普通整数端点分别为：

$$(3,15),\quad (5,13),\quad (7,11),\quad (9,9).$$

因此：

$$(1,7)\in A\mathcal{M},$$

$$(2,6),(3,5)\in AA,$$

而：

$$(4,4)\in \mathcal{M}\mathcal{M}.$$

所以一个单独的固定和值 fiber 已经同时实现完整粗关系字母表：

$$\boxed{\Sigma_{\text{sum}}=\{AA,A\mathcal{M},\mathcal{M}\mathcal{M}\}.}$$

其 AA 读出给出：

$$\boxed{18=5+13=7+11.}$$

这一例子说明：

$$\boxed{\text{Goldbach 读取的是同一完整关系字母表中的 } AA \text{ 字。}} \tag{58.1}$$

58.3 $N=20$

此时：

$$m=10.$$

固定和值槽：

$$(1,8),\quad (2,7),\quad (3,6),\quad (4,5).$$

身份分别为：

$$AA,\quad A\mathcal{M},\quad AA,\quad \mathcal{M}A.$$

因此：

$$20=3+17=7+13.$$

58.4 $N=40$

关系：

$$15+25=40$$

对应两个乘法占位端点：

$$15=3\cdot 5,\qquad 25=5^2.$$

所以这是：

$$\mathcal{MM}$$

槽。

它说明第三种终端关系类型真实存在，但它不是第三种端点身份。

它只是两个乘法占位端点在同一和值下的关系读出。

第八部　终端饱和、全称读出与标准工具

第五十九章　Goldbach 的关系完备性与准确位置

定义：

$$\boxed{G(m) = \#\mathcal{S}_m^{AA}.} \tag{59.1}$$

则：

$$\boxed{G(m) > 0 \Leftrightarrow \Gamma_\infty^{(\sigma=m)} \neq \varnothing.} \tag{59.2}$$

经典二元 Goldbach 的奇素数部分等价于：

$$\boxed{\forall m \geq 3, \qquad G(m) > 0.} \tag{59.3}$$

也等价于：

$$\boxed{\sigma(\Gamma_\infty) = \mathbb{Z}_{\geq 3}.} \tag{59.4}$$

还等价于：

$$\boxed{A \boxplus A = \mathbb{Z}_{\geq 3}.} \tag{59.5}$$

把：

$$\boxed{\sigma(\Gamma_\infty) = \mathbb{Z}_{\geq 3}}$$

称为固定和值关系的**关系完备性**。

它表示每一个合法固定和值目标都被至少一条 AA 关系读出。

定理 59.1　关系完备性—Goldbach 全称等价定理

以下三件事等价：

$$\boxed{\forall m \geq 3, \quad G(m) > 0,} \tag{59.6}$$

$$\boxed{\sigma(\Gamma_\infty) = \mathbb{Z}_{\geq 3},} \tag{59.7}$$

以及：

$$\boxed{A \boxplus A = \mathbb{Z}_{\geq 3}.} \tag{59.8}$$

证明

由定义：

$$G(m) > 0 \Leftrightarrow \Gamma_\infty^{(\sigma=m)} \neq \varnothing.$$

所以：

$$\forall m \geq 3,\ G(m) > 0$$

当且仅当：

$$\sigma(\Gamma_\infty) = \mathbb{Z}_{\geq 3}.$$

另一方面：

$$\sigma(\{a, b\}) = a \boxplus b.$$

因此：

$$\sigma(\Gamma_\infty) = A \boxplus A.$$

三者等价。证毕。

于是：

关系级满射不是额外的补位机制；　它就是固定和值 AA 槽全称非空的关系读出。 (59.9)

这里：

$$N = 4$$

由：

$$2 + 2$$

单独处理。

因此：

Goldbach 是加乘精准补位对象在 AA 槽上的全称非空读出。 (59.10)

这句话给出命题在统一母体中的准确位置。结合本篇已经建立的自然终端、关系槽耗尽、加乘精准补位与关系完备性，Goldbach 的全称非空读出在这里完成闭合。

第六十章　终端三重等价

若：

$$m \in J_k,$$

则：

$$\Gamma_{\infty}^{(\sigma=m)} = \Gamma_{k}^{(\sigma=m)}.$$

因此以下三件事等价：

$$\boxed{\Gamma_{\infty}^{(\sigma=m)} \neq \varnothing,}$$

$$\boxed{m \in A \boxplus A,}$$

$$\boxed{m \in A_k \boxplus A_k.}$$

于是全称命题等价于：

$$\boxed{\forall k, \quad J_k \subseteq A_k \boxplus A_k.} \tag{60.1}$$

所以：

$$\boxed{\text{经典 Goldbach} \Leftrightarrow A \boxplus A = \mathbb{Z}_{\geq 3} \Leftrightarrow \forall k,\ J_k \subseteq A_k \boxplus A_k.} \tag{60.2}$$

这是固定和值全称命题的精确终端化。

第六十一章　读出—终端落位定理

设：

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_\infty$$

为持久关系系统，

$$\theta : \Gamma_\infty \to Y$$

为关系坐标。

若目标空间分割：

$$\boxed{Y = \bigsqcup_{k\geq 1} J_k,} \tag{61.1}$$

并且：

$$y \in J_k \Rightarrow \Gamma_\infty^{(\theta=y)} = \Gamma_k^{(\theta=y)},$$

则：

$$\boxed{y \in \theta(\Gamma_\infty) \Leftrightarrow y \in \theta(\Gamma_k) \qquad (y \in J_k).} \tag{61.2}$$

这就是读出—终端落位。

它表达：

终端不创造全局存在性； 它只把母体中已经成立的关系事实精确落入有限历史层。

(61.3)

第六十二章　完整有限截面

取自然终端段：

$$J_k = \{a_k + 2, \dots, a_{k+1} + 1\},$$

令：

$$h_k = a_{k+1} - a_k.$$

每个目标唯一写成：

$$m = a_k + 2 + r, \qquad 0 \le r < h_k.$$

定义：

$$\boxed{\mathfrak{G}_k = \left\{ (r,d) : \begin{matrix} 0 \le r < h_k, \\ d \in D_k, \\ r + d + 1 \in A_k \end{matrix} \right\}.} \tag{62.1}$$

固定 r 的纤维：

$$\boxed{\mathfrak{G}_k(r) = \{d : (r,d) \in \mathfrak{G}_k\}.} \tag{62.2}$$

由移动交点定理：

$$\boxed{m = a_k + 2 + r \text{ 有二原子表示} \Leftrightarrow \mathfrak{G}_k(r) \neq \varnothing.} \tag{62.3}$$

所以：

$$\boxed{\text{精准读出} = \text{移动交点} = \text{固定和值关系截面非空.}} \tag{62.4}$$

图 4-12　Goldbach 终端饱和闭合图

第四篇主证明链：固定和值的每个目标进入有限自然终端；完整有限截面与关系完备性共同给出全称非空读出。

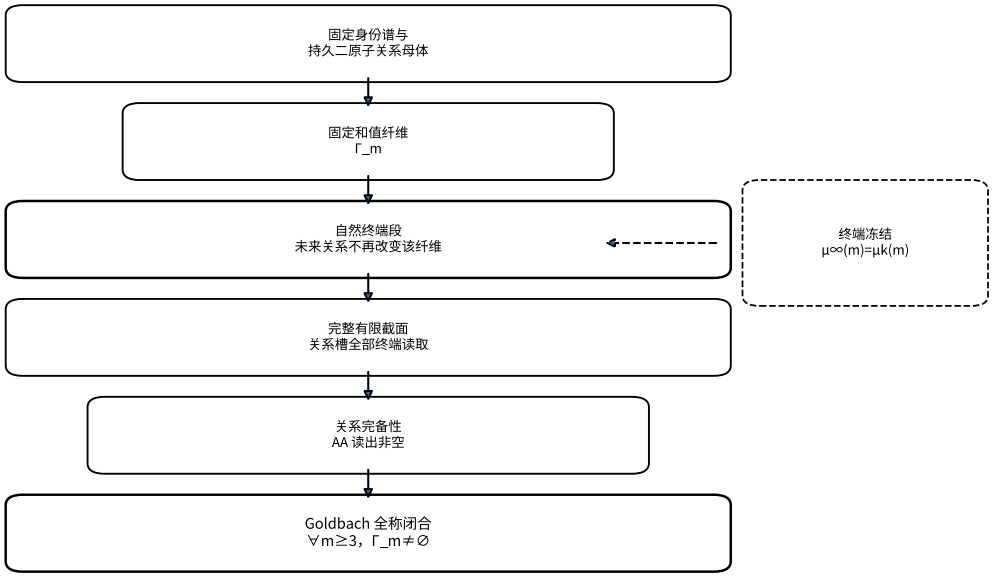


图 4-12　Goldbach 终端饱和闭合图。 固定和值纤维进入自己的自然终端段后，未来关系不再改变该纤维；完整有限截面与关系完备性在同一终端分段上接合，给出 Goldbach 的全称非空读出。

第六十三章　支撑与重数

关系筛不只判断：

有或没有.

它还保存表示重数。

定义：

$$\boxed{\mu_k(m) = \#\Gamma_k^{(\sigma=m)}.} \tag{63.1}$$

对终端目标：

$$m \in J_k,$$

有：

$$\boxed{\mu_\infty(m) = \mu_k(m).} \tag{63.2}$$

因此：

$$m \in S_k \Leftrightarrow \mu_k(m) \geq 1.$$

同时还可以研究：

$$\mu_k(m) = 1,2,3,\ldots$$

的分布。

这与第三篇中 Green–Tao 向固定和值输送高重数的结果自然接合。

第六十四章　八个标准关系筛算子

设：

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots$$

为持久关系系统，

$$\theta$$

为关系坐标。

定义八个标准对象。

64.1　出生算子

$$\boxed{\mathrm{B}_k = \Gamma_k \backslash \Gamma_{k-1} = \Lambda_k.} \tag{64.1}$$

记录第 k 层新增关系。

64.2　投影算子

$$\boxed{\mathrm{P}_\theta(\Gamma_k) = S_k^\theta.} \tag{64.2}$$

把完整关系账本投影到目标坐标。

64.3　终端算子

$$\boxed{\tau_\theta(y) = \min\{k : \Gamma_\infty^{(\theta=y)} = \Gamma_k^{(\theta=y)}\}.} \tag{64.3}$$

64.4　缺口算子

$$\boxed{\mathrm{H}_k = J_k \backslash S_k^\theta.} \tag{64.4}$$

64.5　第一缺口算子

若：

$$\mathrm{H}_k \neq \varnothing,$$

定义：

$$\boxed{\mathrm{F}_k = \min \mathrm{H}_k.} \tag{64.5}$$

64.6　机会算子

对第一缺口 F_k，定义所有仍可能改变其状态的有限关系集合：

$$\boxed{\mathrm{O}(F_k) = \mathcal{H}_k^F.} \tag{64.6}$$

它把一个无限叙述压到有限可能性集合。

64.7 证书算子

若目标已被占据，选择一条实际关系：

$$\boxed{\mathrm{C}(y) = r_y \in \Gamma^{(\theta=y)}.} \tag{64.7}$$

固定和值中可具体记录：

$$(r, d_r, a_i, a_j, p_i, p_j).$$

64.8 饱和算子

定义：

$$\boxed{\mathrm{Sat}_\theta(k) = \mathbf{1}_{\{J_k \subseteq S_k^\theta\}}.} \tag{64.8}$$

若：

$$\mathrm{Sat}_\theta(k) = 1 \qquad \forall k,$$

则整个目标空间被终端饱和。

八个对象构成：

$$\boxed{\mathrm{B} \to \mathrm{P} \to \tau \to \mathrm{H} \to \mathrm{F} \to \mathrm{O} \to \mathrm{C} \to \mathrm{Sat}.} \tag{64.9}$$

图 4-13　八个标准关系筛算子
从新关系出生到整段饱和，八个算子把关系筛压缩成可复用、可软件化的标准链。

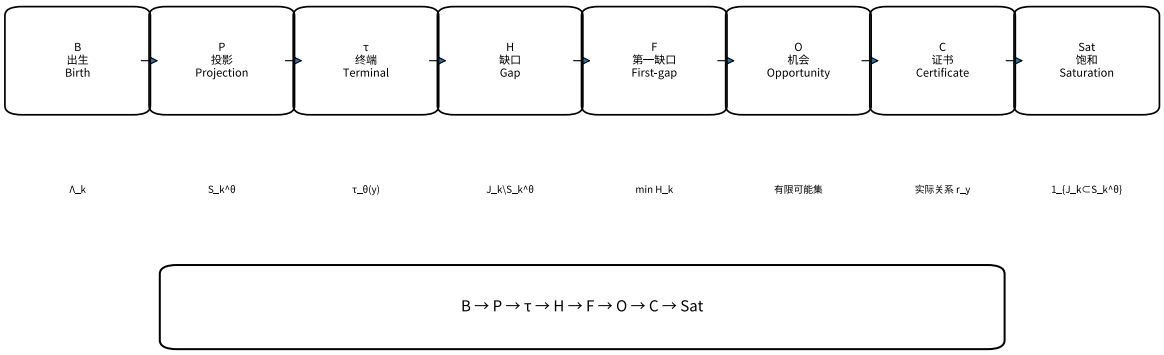


图 4-13　八个标准关系筛算子。 第四篇把关系筛压缩为八个标准算子：出生 B、投影 P、终端 τ、缺口 H、第一缺口 F、机会 O、证书 C 与饱和 Sat。它们形成 $\mathrm{B} \to \mathrm{P} \to \tau \to \mathrm{H} \to \mathrm{F} \to \mathrm{O} \to \mathrm{C} \to \mathrm{Sat}$ 的标准链。

第六十五章　终端饱和型与持续非灭绝型

关系筛至少有两种基本形态。

65.1　终端饱和型

每个目标 y 都有：

$$\tau_\theta(y) < \infty.$$

整体量词是：

$$\forall y.$$

典型结构：

$$\boxed{\text{目标分段} + \text{有限终端} + \text{逐段饱和}.} \tag{65.1}$$

固定和值属于这一类。

65.2　持续非灭绝型

整条关系纤维不存在共同有限终端。

每个具体实例仍然有限认证，但整体要求：

$$\exists^{\infty}$$

或：

$$\forall K\ \exists k > K.$$

典型结构：

$$\boxed{\text{关系供给} + \text{有限吸收} + \text{跨视界持续}.} \tag{65.2}$$

固定差无限回归属于这一类。

因此：

$$\boxed{\text{它们都使用关系筛；　　区别在于外层量词与终端结构。}} \tag{65.3}$$

第六十六章　固定和值与固定差为什么不能使用同一终端逻辑

固定和值：

$$a_i + a_j + 1 = m$$

自动给端点一个上界，所以：

$$\tau_\sigma(m) < \infty.$$

固定差：

$$a_j - a_i = h$$

并不限制关系整体向无穷远移动。

所以全局固定差纤维通常没有共同有限终端。

因此：

固定和值：每个目标有限终端；

固定差：每个实例有限认证，但整个纤维需要持续。 (66.1)

这为持续型关系筛确定了不同的数学任务。

第九部　关系筛的能力边界与一般接口

图 4-14　终端饱和型 vs 持续非灭绝型
两类关系筛共享有限身份认证，但外层量词与终端结构不同。

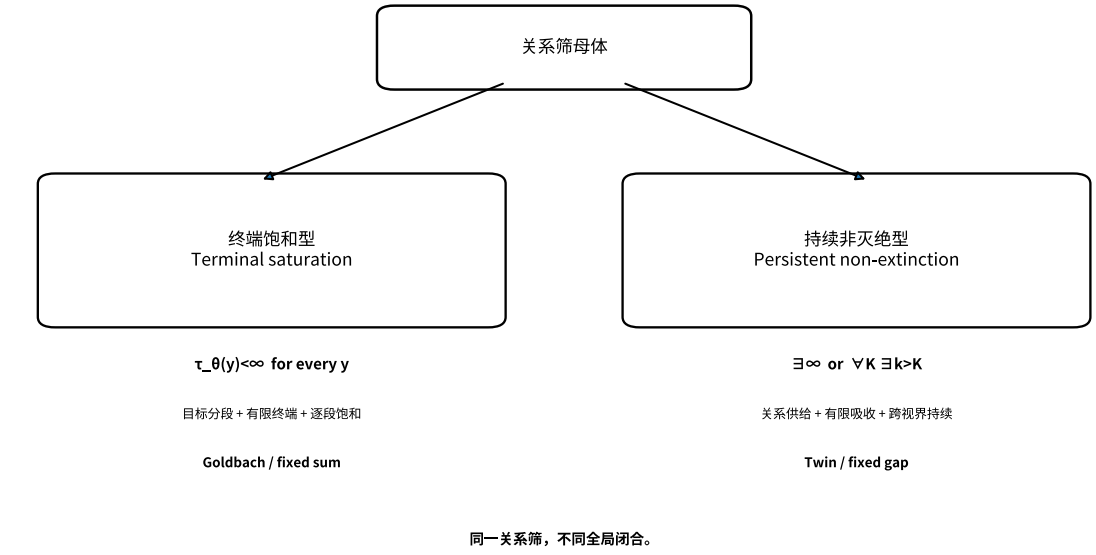


图 4-14　终端饱和型 vs 持续非灭绝型。 关系筛至少有两种基本形态。终端饱和型要求每个目标 y 具有有限终端 $\tau_\theta(y) < \infty$，并在目标分段上逐段饱和，固定和值属于此类；持续非灭绝型的整个关系纤维没有共同有限终端，只要求具体实例有限认证并在跨视界中满足 $\exists^\infty$ 或等价持续量词，固定差无限回归属于此类。

第六十七章　有限终端与全称闭合的层级分工

对固定目标，关系筛在终端层精确读取：

$$G(m) = 0 \quad 或 \quad G(m) > 0.$$

全称命题则在同一终端分段上由关系完备性统一闭合。奇通道的 prime certification 属于端点身份层；固定和值的正性属于反射关系层。两层职责不同，并已在本篇的 Goldbach 主证明链中由自然终端段与关系完备性接合。

因此：

终端认证解决单目标真假读取； 关系完备性与自然终端分段完成 Goldbach 的全称闭合。

(67.1)

这与第三篇批量论证的量词结构完全一致。

第六十八章　简单基数容量不能替代反射定位

固定和值若失败，所有潜在一端原子都必须在反射后落入乘法占位。

仅比较：

$$\text{原子数量}\quad 与\quad \text{乘法占位数量}$$

通常不能得到矛盾。

因为乘法占位集合可以比原子集合更大。

同样，只估计单个责任素数余类的粗容量并求和，也可能远大于原子数。

所以真正需要控制的是：

$$\boxed{\text{具体原子位置} \to \text{具体反射位置} \to \text{具体 first-killer}} \tag{68.1}$$

三者的逐点耦合。

第六十九章　关系保真筛的四个可复用接口

69.1　关系保真接口

保存：

$$\boxed{\text{位置} + \text{端点} + \text{身份} + \text{死亡履历}.}$$

适用于所有有限关系槽。

69.2　原子出生—关系行接口

新原子出生以后，关系行的历史部分由 prime gap 平移：

$$\boxed{a_k \boxplus A_{k-1} = h_k + (a_{k-1} \boxplus A_{k-1}).}$$

69.3　乘法深度通道接口

通过：

$$\Omega, \qquad \lambda = (-1)^{\Omega}$$

记录浅乘法深度与奇偶传输。

69.4　失败证书接口

一个全素数型有限关系的失败，可以记录为：

$$\boxed{\text{具体失败端点} + \text{唯一最小素因子责任} + \text{关系位置}.}$$

这把“失败”从一个布尔值提升为可审计的有限对象。

第七十章　一个新的关系怎样进入有限控制几何

任意新关系可以按以下顺序进入关系筛。

第一步，写出关系映射：

$$F = (F_1, \dots, F_r).$$

第二步，写出目标深度集合：

$$B \subseteq \mathbb{N}^r.$$

第三步，确定有限观察区域。

第四步，确定局部阻塞：

$$B_\ell(F).$$

第五步，检查局部许可。

第六步，确定真实死亡规则。

第七步，构造有限终端或持续型视界。

第八步，保存关系见证与失败证书。

第九步，调用第三篇对应的量词闭合器完成批量闭合。

所以：

$$\boxed{\text{关系轨道} \to \text{乘法深度} \to \text{局部阻塞} \to \text{真实死亡} \to \text{关系保真} \to \text{有限视界} \to \text{量词闭合}.} \tag{70.1}$$

第七十一章　本篇基础定理总表

基础定理 AA　原子顶点预像

$$\boxed{\{t: F_j(t) \text{ 全为素数}\} = F^{-1}(\mathcal{V}_r).}$$

基础定理 AB　有限模板局部许可

$$\boxed{\nu_H(q) = q}$$

意味着一个局部素数层完全覆盖模板；判断完全覆盖只需检查：

$$q \le |H|.$$

基础定理 AC　CRT 生存树

$$\boxed{|A_s(H)| = \prod_{i=1}^{s} (p_i - \nu_H(p_i)).}$$

并且：

$$\boxed{\frac{|A_s(H)|}{W_s} = \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{\nu_H(p_i)}{p_i}\right).}$$

基础定理 AD　首次局部淘汰守恒

令：

$$\eta_i = 1 - \frac{\nu_H(p_i)}{p_i}.$$

则：

$$\boxed{1 = \prod_{i=1}^{s} \eta_i + \sum_{i=1}^{s} (1 - \eta_i) \prod_{j<i} \eta_j.}$$

基础定理 AE　真实死亡唯一性

$$\boxed{\kappa(n) = P^{-}(n)}$$

使每个奇合数只真实死亡一次。

基础定理 AF　关系 first-killer

任何有限全素数型候选关系若失败，都有唯一最早责任素数。

基础定理 AG　关系字母表

$$\boxed{\omega(R) = (\iota(n_1), \dots, \iota(n_r)).}$$

关系族的全部可能终端身份字组成：

$$\boxed{\Sigma_{\mathcal{R}}.}$$

基础定理 AH　奇通道立方根认证

$$\boxed{z \geq X^{1/3} \Rightarrow O_z = \mathbf{1}_{\mathbb{P}} \quad \text{on } [3, X].}$$

基础定理 AI　$X^{1/4}$ 奇通道分解

$$\boxed{O_z = P_1 \sqcup P_3 \qquad (z \geq X^{1/4}).}$$

基础定理 AJ　固定和值终端冻结

$$\boxed{m \in J_k \Rightarrow \Gamma_{\infty}^{(\sigma=m)} = \Gamma_k^{(\sigma=m)}.}$$

基础定理 AK　自然终端段分割

$$\boxed{\mathbb{Z}_{\geq 3} = \bigsqcup_{k \geq 1} J_k.}$$

基础定理 AL　移动交点等价

$$\boxed{m = a_k + 2 + r \in A_k \boxplus A_k \Leftrightarrow (r + 1 + D_k) \cap A_k \neq \varnothing.}$$

基础定理 AM　关系槽耗尽

$$\boxed{\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m^{AA} \sqcup \mathcal{S}_m^{A\mathcal{M}} \sqcup \mathcal{S}_m^{\mathcal{M}\mathcal{M}}.}$$

基础定理 AN　逐槽精准补位

$$\boxed{\hat{\alpha}(a)\hat{\alpha}(b) = \hat{\alpha}(a) + \hat{\alpha}(b) - 1 + \hat{\beta}(a)\hat{\beta}(b).}$$

基础定理 AO　整体关系槽守恒

$$\boxed{H(m) = G(m) + X(m) + C(m).}$$

基础定理 AP　双乘法责任分解

$$\boxed{\mathcal{M} = \bigsqcup_p E_p, \qquad C(m) = \sum_{p,q} C_{p,q}(m).}$$

基础定理 AQ　关系完备性—Goldbach 全称等价

$$\boxed{\forall m \geq 3,\ G(m) > 0 \Leftrightarrow \sigma(\Gamma_\infty) = \mathbb{Z}_{\geq 3} \Leftrightarrow A \boxplus A = \mathbb{Z}_{\geq 3}.}$$

基础定理 AR　读出—终端落位

若目标 $y \in J_k$ 在第 k 层终端，则：

$$\boxed{y \in \theta(\Gamma_\infty) \Leftrightarrow y \in \theta(\Gamma_k).}$$

图 4-15　第四篇基础定理依赖图

AA–AR 按正文结构分成四个连续模块；模块名与 theorem tags 分离显示，避免层内叠压。

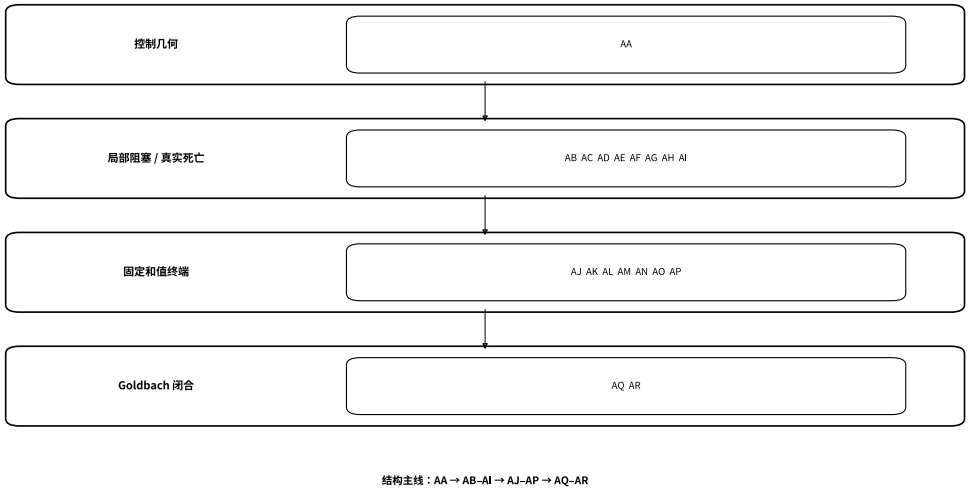


图 4-15　第四篇基础定理依赖图。 第四篇基础定理 AA–AR 按正文结构分为四个连续模块：原子顶点预像的控制几何；局部许可、CRT、首次淘汰、真实死亡、关系字母表与奇通道认证；固定和值终端冻结、自然终端段、移动交点、关系槽耗尽与责任分解；最后进入关系完备性—Goldbach 全称等价与读出—终端落位。

结语　关系筛真正筛的是什么

从整数筛的角度看，一个素数层做的事情似乎很简单：

$$q \mid n \quad \Rightarrow \quad n \text{ 被排除.}$$

但关系问题从来没有这么简单。

一条关系必须保存：

哪个位置，　与哪个位置配对，　在哪一层第一次失败，　什么时候所有未来可能性已经关闭.

因此关系筛真正筛的不是“整数”。

它筛的是：

关系实例在有限乘法历史中的完整身份。

本篇首先把所有有限关系放进同一个乘法深度场：

$$\Delta_r.$$

全素数关系只是其中的原子顶点骨架：

$$\mathcal{V}_r.$$

然后，每一个素数控制层通过局部余类作用于关系轨道。

如果某一层完全覆盖参数空间，关系被局部阻断；

如果没有任何一层完全覆盖，只能得到局部许可，不能把它误写成整体占据。

有限局部相位随后被 CRT 生存树完整展开。

每一个存活父相位在新素数层产生 p_i 个子相位，其中：

$$v_H(p_i)$$

个继续存活，而：

$$v_H(p_i)$$

个在这一层第一次失去局部许可。

于是：

全部参数相位 = 联合存活 + 各层首次局部淘汰.

所以局部筛选不再只是一个最终乘积，而是一条逐层可追溯的有限履历。

真实死亡进一步把普通“整除命中”改造成唯一整数身份履历：

每个奇合数只在它的最小素因子层真实死亡一次。

关系 first-killer 又把这一唯一性提升到关系对象。

关系字母表进一步回答：

一条关系走到终端以后，究竟可能成为什么。

固定和值的粗字母表是：

$$AA, \qquad A\mathcal{M}, \qquad \mathcal{M}\mathcal{M}.$$

真实死亡告诉我们一条关系怎样离开候选层；

关系字母表告诉我们它最终落在哪一种身份类型中。

奇偶双通道说明，乘法死亡还携带乘法深度信息；立方根认证说明，保存更多真实身份确实能够把 prime certification 从平方根层提前到更浅尺度。

但固定和值的例子同时告诉我们：

更强的端点认证，不等于关系已经自动成立。

因为固定和值最终读取的是：

$$\langle f, J_N f \rangle,$$

是具体反射配对。

所以关系筛的最高纪律不是“尽量压缩”，而是：

工具最有价值的作用是保存关系，而不是替代关系。

在固定和值中，这种保存最终形成自然终端段：

$$J_k = \{a_k + 2, \dots, a_{k+1} + 1\}.$$

每个目标只属于一个有限历史世界。

终端以后，关系槽被完全耗尽为：

$$AA, \qquad A\mathcal{M}/\mathcal{M}A, \qquad \mathcal{M}\mathcal{M}.$$

这给出本篇最重要的对象层金句：

乘法占位与原子余项本来就是同一自然数母体的互补身份。

以及：

乘法并没有与素数竞争； 素数就是乘法占位之后的精确余项。 加法也没有重新创造关系； 它只是把这两个互补身份沿固定和值重新配对读出。

于是固定和值命题的准确位置是：

Goldbach 是加乘精准补位对象在 AA 槽上的全称非空读出。

这不是把关系问题抹掉。

恰恰相反，只有把固定和值的反射位置、自然终端、关系槽身份、真实死亡和有限证书全部还原，才能把它准确地放进统一关系母体。

第四篇由此完成：

关系轨道
⇓
乘法深度场
⇓
局部阻塞与许可
⇓
CRT 生存树
⇓
首次局部淘汰
⇓
真实死亡与 first-killer
⇓
关系字母表与关系保真筛
⇓
终端视界
⇓
终端关系几何
⇓
Goldbach 全称饱和闭合.

与之相对，固定差的无限回归没有一个共同的终端目标段。

它需要另一种关系筛：

持续非灭绝型.

那里真正重要的量将不再是“这一目标何时冻结”，而是：

关系供给在无穷多个移动视界中持续超过有限吸收。

第五篇将这一持续型结构写成供给—吸收账本与累计净势，并完成 Twin 的无限回归闭合。

第五篇　无限关系的精准架构

——从平方视界、关系供给与有限吸收到累计证书与全局量词

本篇主旨

有限关系可以终端认证，但无限关系不能由“把有限范围算得越来越大”自动得到。

无限量词必须有自己的数学对象。

对无限回归型关系，核心不是某一个窗口是否成功，而是对持续关系供给与历史乘法结构的最大吸收容量作同一账本比较：

有限窗口持续产生关系供给； 历史乘法结构的吸收容量有限，不能永久覆盖全部持续供给。

因而，本篇把无限关系写成一条可逐层验收的链：

有限视界 → 关系供给 → 吸收资源 → 最大吸收容量 → 净关系势 → 累计净势 → 无限量词.

其中，第四篇已经把有限关系内部的控制历史写成：

局部许可 → CRT 生存树 → 首次局部淘汰 → 真实死亡 → 关系字母表.

第五篇从这一有限账本继续向上：CRT 生存树给出允许的相位枝，B_H 读取这些允许枝在具体平方视界中的实际关系供给，T_H 与 D_H 再把供给按终端身份分解，累计证书最后进入与命题完全匹配的量词层。

其中每一步都是有限对象；无限只出现在最后一个“无界”判定中。

这构成无限素数关系的标准接口。

摘要

第四篇建立了关系筛的第一种基本形态：**终端饱和型关系筛**。固定和值目标具有有限终端段；每个目标在有限历史中冻结，并由关系完备性完成终端纤维的全称非空读出。

本篇建立第二种基本形态：**持续非灭绝型关系筛**。

这类关系的整个纤维没有共同有限终端。典型例子是固定差关系：

$$p, \qquad p+d.$$

每一个具体候选都可以在有限平方视界内完成认证，但整个关系可以整体向无穷远移动。因此全局命题不再是：

$$\forall \theta \ \exists x,$$

而可能是：

$$\exists^{\infty} x.$$

第四篇的有限控制链在本篇中获得一个直接的数值接口。对固定模板 H，CRT 生存树给出旧控制层允许的相位枝；把这些枝限制到具体平方视界并要求全部端点逃过旧历史，得到实际关系供给：

$$\boxed{\mathcal{B}_H(r,s), \qquad B_H(r,s) = |\mathcal{B}_H(r,s)|.}$$

因此：

$$\boxed{\text{CRT 生存树} \to \text{实际视界供给 } B_H \to \text{终端身份字} \to T_H + D_H.}$$

局部相位容量与实际关系供给由此严格分层：前者说明哪些余类相位仍被允许，后者说明这些允许相位在当前整数视界中实际生成了多少完整关系。

本篇首先严格区分七种主要全局接口：

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{INF_RECURRENCE,}\\ \text{UNIVERSAL_FIBER,}\\ \text{WINDOW_UNIVERSAL,}\\ \text{ARBITRARILY_LONG,}\\ \text{PARAMETER_INFINITE,}\\ \text{UNIVERSAL_PREDICATE,}\\ \text{BLOCK_SEPARATION.}\end{array}}$$

对无限回归型关系

$$R(x) \in \{0,1\},$$

定义累计计数

$$C_R(X) = \sum_{x \le X} R\,(x).$$

则：

$$\boxed{\exists^{\infty} x : R(x) = 1 \Leftrightarrow C_R(X) \text{ 无界.}}$$

因此，无限回归的本质不是“视界很大”，而是**累计关系数没有上界**。

随后，本篇建立固定偏移模板

$$H = \{h_1, \dots, h_k\}$$

的统一平方视界。取连续奇素数

$$p < r < s,$$

定义内部关系窗口

$$\boxed{I_H(r,s) = \{n \in 2\mathbb{Z}+1 : r^2 < n + h < s^2 \text{ 对所有 } h \in H\}.}$$

在旧历史层中，定义关系供给

$$\boxed{B_H(r,s)=\#\{n\in I_H(r,s):P^-(n+h)\geq r\text{ 对所有 }h\in H\}.}$$

定义真实全原子关系数

$$\boxed{T_H(r,s)=\#\{n\in I_H(r,s):n+h\in\mathbb{P}\text{ 对所有 }h\in H\}.}$$

死亡数为

$$\boxed{D_H(r,s)=B_H(r,s)-T_H(r,s).}$$

在 $r\geq 5$ 时，任何旧历史幸存但最终死亡的端点必具有形式

$$n+h_j=ru,$$

其中

$$u\in\mathbb{P},\qquad s\leq u<\frac{s^2}{r}.$$

因此定义有限吸收资源池

$$\boxed{U(r,s)=\left\{u\in\mathbb{P}:s\leq u<\frac{s^2}{r}\right\}.}$$

一个资源 u 可能通过模板中的不同端点角色吸收不同关系。为控制这种复用，取有限 wheel

$$Q$$

并令

$$M_Q=\prod_{q\in Q}q.$$

定义

$$J_H(c;Q)=\{j:\gcd(c+h_i-h_j,M_Q)=1\text{ 对所有 }i\neq j\},$$

以及吸收复用度

$$\boxed{\mu_H(Q)=\max_{c\in(\mathbb{Z}/M_Q\mathbb{Z})^\times}|J_H(c;Q)|.}$$

则得到本篇的核心有限容量定理：

$$\boxed{D_H(r,s)\leq\mu_H(Q)\,|U(r,s)|.}$$

若记

$$\Delta=s-r,$$

则对 $r\geq 5$ 还有结构上界

$$\boxed{|U(r,s)| \le \Delta - 1.}$$

因此定义两种有限吸收容量：

$$\boxed{C_H^{\text{exact}} = \mu_H(Q)|U(r,s)|,}$$

$$\boxed{C_H^{\text{struct}} = \mu_H(Q)(\Delta - 1).}$$

以及两种净关系势：

$$\boxed{e_H^{\text{exact}} = B_H - C_H^{\text{exact}},}$$

$$\boxed{e_H^{\text{struct}} = B_H - C_H^{\text{struct}}.}$$

由容量定理：

$$\boxed{T_H \ge e_H^{\text{exact}} \ge e_H^{\text{struct}}.}$$

所以：

$$\boxed{e_H^{\text{exact}} > 0 \Rightarrow T_H \ge 1,}$$

而更强的纯结构证书为：

$$\boxed{e_H^{\text{struct}} > 0 \Rightarrow T_H \ge 1.}$$

跨平方视界定义累计净势

$$\boxed{\mathcal{E}_H^{\text{exact}}(N) = \sum_{j \le N} e_{H,j}^{\text{exact}},}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_H^{\text{struct}}(N) = \sum_{j \le N} e_{H,j}^{\text{struct}}.}$$

若

$$T_H^{\le N} = \sum_{j \le N} T_{H,j},$$

则逐窗相加得到：

$$\boxed{T_H^{\le N} \ge \mathcal{E}_H^{\text{exact}}(N) \ge \mathcal{E}_H^{\text{struct}}(N).}$$

因此：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_H^{\text{exact}}(N) = +\infty \Rightarrow H \text{ 关系无限回归.}}$$

同理：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty}\mathcal{E}_H^{\mathrm{struct}}(N)=+\infty \Rightarrow H \text{ 关系无限回归.}}$$

这给出有限窗口进入无限回归的严格桥梁。

单位差关系

$$H=\{0,2\}$$

是这一一般结构的最小实例。对

$$Q=\{3,5\},$$

有

$$\boxed{\mu_{\{0,2\}}(Q)=1.}$$

因此：

$$\boxed{T_{r,s}\geq B_{r,s}-|U(r,s)|\geq B_{r,s}-(\Delta-1).}$$

平方视界唯一归属、接缝闭合、双逃逸、单层净化、真实死亡见证

$$v=ru\pm 2,$$

单余因子单死亡、清洁区、资源半衰与有限寿命全部保留，并被放入这一更一般的供给—吸收框架。

其中资源半衰给出：

$$\boxed{\log\frac{u}{s}<\frac{1}{2}\log\frac{u}{r}.}$$

它严格说明：

每一个固定历史原子都只有有限吸收寿命。

无限回归的全局闭合由累计容量完成。新的历史资源也会不断出生，因此本篇把**全部关系供给**与**全部可用吸收容量**放入同一累计账本；资源复用度、半衰与有限寿命控制吸收端，持续关系供给控制供给端，最终由累计净势完成全局判定。

本篇还保留单位差的关系级 Lucas 证书。对给定巨大候选

$$(M-1,M+1),$$

可以使用共同中心、共同 Lucas 系统和共同群阶约束一次认证整个关系；在适当的 2-幂主链足够厚时，还可把完整中心因子信息压缩为一条足厚共同主链。

有限计算部分保留 905 个连续平方视界的逐窗验收，并加入统一模板模块中的

$$B_H,\ U,\ \mu_H,\ C_H,\ e_H,\ T_H,\ D_H$$

逐窗数据和累计净势。

本篇最终确立：

> **无限不是一个不能触碰的整体；它是有限证书序列的无界累计。**

关键词： 无限回归；全称量词；持续非灭绝；平方视界；CRT 生存树；关系字母表；关系供给；有限吸收；吸收复用度；净关系势；累计证书；Twin；prime tuples；批量论证；形式证明；关系级证书

第一部　无限量词不是一个概念

第一章　从有限终端进入无限结构

第二篇已经证明：

> 任何有限端点关系，都可以在有限视界中获得最终局部身份。

这解决了：

一个具体关系实例怎样被有限决定。

但以下命题显然不是同一种要求：

$$\forall N\ \exists p,$$

$$\exists^{\infty} p,$$

$$\forall k\ \exists a, d,$$

$$\exists^{\infty} \theta\ \exists x,$$

$$\forall n\ P(n).$$

它们都涉及无穷参数，但量词结构不同。

因此：

无限首先是一种量词结构，　然后才是一种计算尺度。 (1.1)

把有限视界做得再大，也不能改变这一点。

第二章　七种主要全局接口

本书把常见全局关系分成七类。

2.1　无限回归

形式：

$$\boxed{\exists^{\infty} x : R(x) = 1.} \tag{2.1}$$

典型关系：

- Twin；
- 一般固定差；
- Sophie Germain；
- 固定 prime tuple；
- 多项式 prime pullback；
- Mersenne prime 参数回归。

2.2　逐参数全称纤维

形式：

$$\boxed{\forall \theta, \quad \exists x : R_{\theta}(x) = 1.} \tag{2.2}$$

典型关系：

- Goldbach；
- Lemoine / Lévy；
- 其他逐目标非空反射纤维。

2.3　窗口全称

形式：

$$\boxed{\forall n, \quad \exists x \in I_n : \alpha(x) = 1.} \tag{2.3}$$

典型关系：

- Legendre；
- Oppermann 的两个窗口。

2.4　任意长度

形式：

$$\boxed{\forall k, \quad \exists \Theta, x : R_{k,\Theta}(x) = 1.} \tag{2.4}$$

典型关系：

- Green–Tao 任意长素数等差链。

2.5 参数无限

形式：

$$\boxed{\exists^{\infty}\theta,\quad \exists x: R_{\theta}(x)=1.} \tag{2.5}$$

这里无限的是成功参数本身。

2.6 逐索引全称谓词

形式：

$$\boxed{\forall n,\quad P(n).} \tag{2.6}$$

典型关系：

- Brocard 型窗口计数；
- Andrica；
- Firoozbakht；
- Grimm 型逐块关系。

2.7 身份块分离

这一类要求存在一个有限块长，使不同起点的完整因子身份块最终不能保持完全一致。

典型形式：

$$\boxed{\exists K\ \forall x\neq y\ \exists 0\le j<K: \mathrm{PF}(x+j)\neq \mathrm{PF}(y+j).} \tag{2.7}$$

这类关系与“出现无限多次”完全不同。

图 5-01　七种主要全局接口

不同命题共享固定谱，但全局判据不同；每一种量词都有自己的标准有限量。

量词类型	标准有限量	全局判据
无限回归	C_R(X)	无界
逐参数全称纤维	C(θ)	每个参数 >0
窗口全称	W(n)	每个窗口 ≥1
任意长度	L(X)	无界
参数无限	P(X)	无界
逐索引全称	F(X)	恒为 0
身份块分离	B_K(x)	存在统一有限 K

“无限”不是一个统一量词；接口类型决定证明应追踪什么有限证书。

图 5-01　七种主要全局接口。 第五篇把全局关系分成七类：无限回归、逐参数全称纤维、窗口全称、任意长度、参数无限、逐索引全称谓词与身份块分离。它们分别对应标准有限量 $C_R(X), C(\theta), W(n), L(X), P(X), F(X), B_K(x)$，因此不能用同一个“无限性”判据替代。

第三章　无限回归的精确判据

设：

$$R(x) \in \{0,1\}.$$

定义累计命中函数：

$$\boxed{C_R(X) = \sum_{x \le X} R\,(x).} \tag{3.1}$$

定理 3.1　无限回归计数判据

$$\boxed{\exists^{\infty} x: R(x) = 1 \Leftrightarrow C_R(X) \text{ 无界.}} \tag{3.2}$$

证明

若命中集合无限，则对任意整数 M，都可以找到至少 M 个不同命中点。取 X 大于这些点，得到：

$$C_R(X) \ge M.$$

所以累计计数无界。

反之，若命中集合有限，设总命中数为 M，则：

$$C_R(X) \le M$$

对所有 X 成立，与无界矛盾。证毕。

这条定理把：

$$\boxed{\exists^{\infty}}$$

完全转换成：

$$\boxed{\text{一个单调整数值函数是否无界.}}$$

这就是无限回归最基本的批量接口。

第四章　逐参数全称纤维的精确判据

定义：

$$\boxed{C(\theta) = \sum_{x} R_\theta\,(x).} \tag{4.1}$$

则：

定理 4.1　全称纤维非空判据

$$\boxed{\forall\theta\ \exists x{:}\, R_\theta(x) = 1 \Leftrightarrow C(\theta) > 0 \quad \forall\theta.} \tag{4.2}$$

因此全称纤维的批量论证目标通常是构造：

$$\boxed{L(\theta) > 0}$$

满足：

$$\boxed{C(\theta) \geq L(\theta).} \tag{4.3}$$

它和无限回归完全不同：

- 全称要求每一纤维都不能漏；
- 无限回归允许任意大的空隙，只要求没有最后一次命中。

第五章　窗口全称、任意长度与参数无限

5.1　窗口全称

定义：

$$W(n) = \sum_{x \in I_n} \alpha\,(x).$$

则：

$$\boxed{\forall n\ \exists x \in I_n \cap \mathbb{P} \Leftrightarrow W(n) \geq 1 \quad \forall n.} \tag{5.1}$$

5.2　任意长度

定义截止视界 X 内最大实现长度：

$$\boxed{L(X) = \max\{k{:}\,\exists \Theta, x \leq X,\ R_{k,\Theta}(x) = 1\}.} \tag{5.2}$$

则：

$$\boxed{\forall k\ \exists \Theta, x{:}\, R_{k,\Theta}(x) = 1 \Leftrightarrow L(X) \text{ 无界.}} \tag{5.3}$$

5.3　参数无限

定义：

$$\boxed{P(X) = \#\{\theta \leq X{:}\,\exists x,\ R_\theta(x) = 1\}.} \tag{5.4}$$

则：

$$\boxed{\exists^{\infty}\theta\ \exists x{:}\, R_\theta(x) = 1 \Leftrightarrow P(X) \text{ 无界.}} \tag{5.5}$$

第六章　逐索引全称与身份块分离

6.1　逐索引全称

定义失败计数：

$$\boxed{F(X) = \sum_{n \le X} \mathbf{1}_{\{\neg P(n)\}}.} \tag{6.1}$$

则：

$$\boxed{\forall n,\ P(n) \Leftrightarrow F(X) = 0 \quad \forall X.} \tag{6.2}$$

6.2　身份块分离

定义：

$$B_K(x) = (\mathrm{PF}(x), \dots, \mathrm{PF}(x + K - 1)).$$

全局目标可以写成：

$$\boxed{\exists K\ \forall x \neq y : B_K(x) \neq B_K(y).} \tag{6.3}$$

这里要求的是一个**统一有限分离长度**。

因此不能用普通累计命中无界来代替。

第七章　量词决定证明接口

七种接口可以压缩成：

类型	标准有限量	全局判据
无限回归	$C_R(X)$	无界
全称纤维	$C(\theta)$	每个参数 > 0
窗口全称	$W(n)$	每个窗口 ≥ 1
任意长度	$L(X)$	无界
参数无限	$P(X)$	无界
逐索引全称	$F(X)$	恒为 0
身份块分离	$B_K(x)$	存在统一有限 K

所以：

不同无限命题共享固定谱，　但不共享同一个全局判据。　(7.1)

第二部　有限周期与无限持续

第八章　有限控制层的精确周期

固定有限控制深度 z。

定义：

$$\boxed{W_z = \prod_{\substack{3\le q\le z\\ q\in\mathbb{P}}} q\,.} \tag{8.1}$$

对任何只依赖这些素数整除余类的局部状态，其相位在模 W_z 上精确重复。

因此：

$$\boxed{\text{有限控制层具有严格周期。}} \tag{8.2}$$

在普通奇数轴上，对应周期为：

$$2W_z.$$

第九章　有限周期不等于无限关系周期

当控制深度由

$$z$$

增长到新的素数层时，

$$W_z$$

也随之改变。

因此全局关系不是在一个固定有限模数上无限重复。

这里必须区分：

$$S_0\text{:控制层冻结后的有限相位循环,}$$

与：

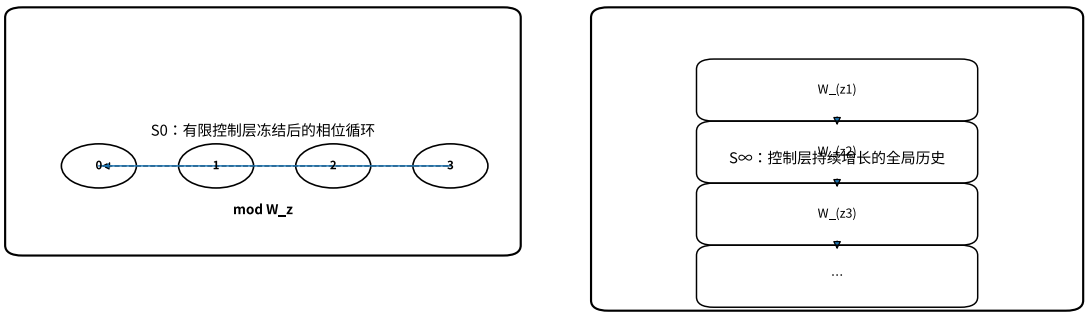
$$S_\infty\text{:控制层持续增长时的全局量词.}$$

所以：

$$\text{有限周期负责局部组织；　　无限接口负责全局持续。} \tag{9.1}$$

图 5-02　有限周期 S0 与无限持续 S∞

固定控制深度 z 时，相位模 W_z 严格周期；当新的素数控制层不断加入时，全局历史不是一个固定有限周期。



有限周期负责局部组织；无限接口负责全局持续。

S0 ≠ S∞

图 5-02　有限周期 S0 与无限持续 S∞。 固定有限控制深度 z 时，只依赖这些素数整除余类的局部状态在模 W_z 上精确重复，这就是 S_0；但当控制深度继续增长，W_z 也改变，全局关系不能被理解为一个固定有限模数的无限重复，这就是 S_∞ 层的持续问题。

第十章　三类接缝

有限控制几何中存在三种不同边界。

10.1　生成接缝

新素数 s 在：

$$s^2$$

处第一次能够作为新的最小素因子产生独占真实死亡。

它回答：

> 什么时候增加一个新的真实控制层？

10.2　相位接缝

有限控制层在模：

$$W_z$$

处重新回到同一余类相位。

它回答：

> 什么时候回到同相位？

10.3　平方接缝族

所有：

$$r^2$$

构成连续有限身份认证的天然分段。

它回答：

> 怎样把无穷轴分成一列有限可验收窗口？

第三部　持续非灭绝型关系筛

第十一章　为什么固定差没有共同终端

固定差关系：

$$p, \qquad p+d$$

可以整体向右平移。

所以不存在一个有限上界 X，使整个固定差纤维在 X 以后再也不会出现新成员。

因此：

固定差不是终端饱和型，　　而是持续非灭绝型。 (11.1)

每个具体候选仍有有限终端；

整个纤维则要求：

没有最后一个成功窗口。 (11.2)

第十二章　单位差是最小持续关系

在原子坐标中定义：

$$\boxed{\chi_{\mathrm{Twin}}(a)=\hat{\alpha}(a)\hat{\alpha}(a+1).} \tag{12.1}$$

则：

$$\chi_{\mathrm{Twin}}(a)=1$$

当且仅当：

$$2a+1,\qquad 2a+3$$

都是素数。

定义单位差累计命中数：

$$\boxed{C_T(X)=\sum_{a\le X}\chi_{\mathrm{Twin}}(a)=\sum_{a\le X}\hat{\alpha}(a)\hat{\alpha}(a+1).} \tag{12.1a}$$

于是：

$C_T(X)$ 无界 ⇔ 单位差原子关系无限出现.

所以 Twin 在母体中的准确对象是：

$$\boxed{\Gamma^{[1]}=\delta^{-1}(1).} \tag{12.2}$$

并且：

证明对象是整个单位关系，　而不是两个互不相干的端点。	(12.3)

第十三章　单位差母—子继承

若：

$$r = \{a, a+1\} \in \Gamma_k,$$

则：

$$r \in \Gamma_j \qquad \forall j \geq k.$$

因此：

一个真正单位差关系一旦出生并完成认证， 以后不会被新的原子历史删除。

(13.1)

这就是单位差关系的持久性。

第十四章　连续素数平方视界

取连续奇素数：

$$\boxed{p < r < s.} \tag{14.1}$$

定义：

$$\boxed{W_{r,s} = [r^2, s^2).} \tag{14.2}$$

考虑：

$$r^2 \leq n < n + 2 < s^2.$$

在这一有限窗口内，所有真正单位差关系都可以零误差认证。

第十五章　平方视界唯一归属

所有充分大的真正单位差素数对：

$$(q, q+2)$$

唯一属于一个连续平方视界。

这是因为：

$$3^2 < 5^2 < 7^2 < \cdots$$

严格递增并趋于无穷。

不同平方视界互不重叠。

因此无限单位差关系可以被无损分成：

$$\boxed{W_1, W_2, W_3, \ldots} \tag{15.1}$$

一列有限世界。

第十六章　平方接缝闭合

真正 Twin 不会跨越一个奇素数平方边界。

若：

$$q < r^2 < q + 2,$$

由于奇数间距为 2，只能涉及：

$$r^2 - 2, \quad r^2.$$

但：

$$r^2$$

为合数。

所以：

连续平方视界对真正 Twin 是无损分区。 (16.1)

图 5-03　平方视界序列与接缝

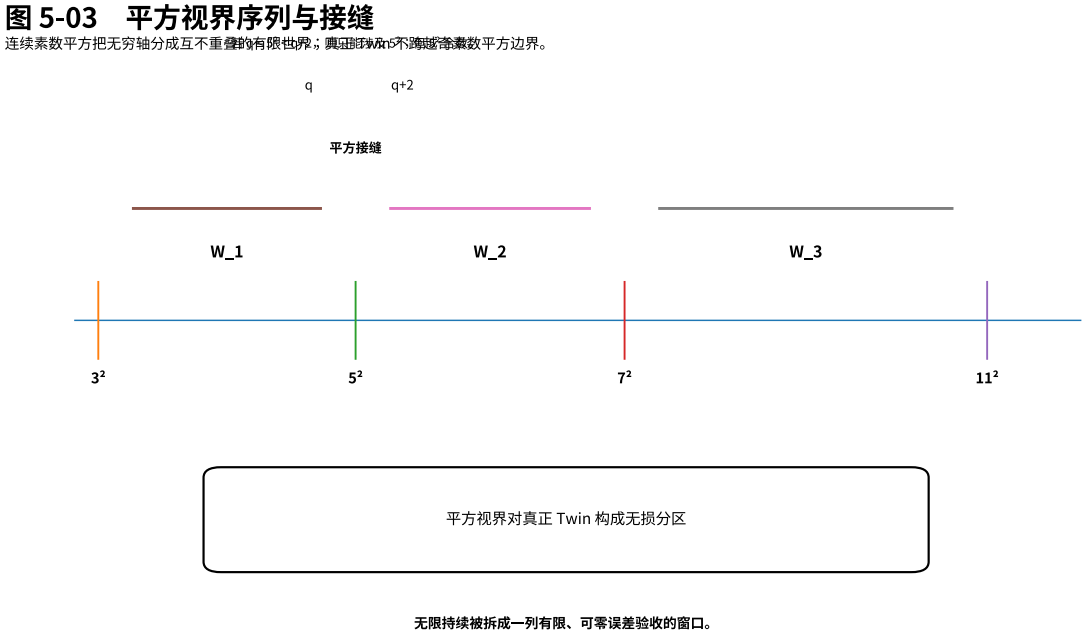


图 5-03　平方视界序列与接缝。 连续奇素数平方把无穷轴无损分成 $W_{r,s} = [r^2, s^2)$ 这样的有限视界。所有充分大的真实 Twin 唯一属于一个平方视界；若一对奇数跨越奇素数平方边界，则它必须涉及该平方本身，而平方为合数，因此真实 Twin 不跨平方接缝。

第十七章　旧双逃逸关系

旧历史已经处理所有：

$$q \le p$$

的素因子。

定义：

$$\boxed{\mathcal{B}_{r,s} = \left\{(n, n+2): \begin{matrix} r^2 \le n < n+2 < s^2, \\ \gcd(n(n+2), p^{\#}) = 1 \end{matrix}\right\}.} \tag{17.1}$$

记：

$$\boxed{B_{r,s} = |\mathcal{B}_{r,s}|.} \tag{17.2}$$

这些候选同时逃过全部旧历史控制层。

第十八章　单层净化

旧双逃逸关系中的任一合数端点，最小素因子只能为：

$$r.$$

因此终端身份只有：

$$\boxed{(P,P),\qquad (ru,P),\qquad (P,ru).} \tag{18.1}$$

不会出现：

$$(ru,rv),$$

因为这会要求：

$$r \mid 2.$$

所以：

平方视界把全部旧双逃逸关系压缩成一个有限三态系统。

(18.2)

用第四篇的关系字母表记号，这个三态系统正是：

$$\boxed{\Sigma_{\mathrm{Twin}}^{(r)} = \{AA, \mathcal{M}_r A, A\mathcal{M}_r\}.} \tag{18.3}$$

每一个旧双逃逸候选在终端以后都落入其中唯一一个身份字。

因此：

$$\boxed{B_{r,s} = T_{r,s} + D_{r,s}}$$

不仅是数量恒等式，也是关系字母表上的分类恒等式：

- AA 贡献 $T_{r,s}$；
- $\mathcal{M}_r A$ 与 $A\mathcal{M}_r$ 共同贡献 $D_{r,s}$。

于是供给—吸收账本从一开始就保留端点级终端身份。

第十九章　平方视界精确 Twin 公式

定理 19.1

$$\boxed{\mathcal{T}_{r,s} = \{n : r^2 \le n < n+2 < s^2,\ \gcd(n(n+2), r^{\#}) = 1\}.} \tag{19.1}$$

证明

若：

$$\gcd(n(n+2), r^{\#}) = 1,$$

则两个端点均没有不超过 r 的素因子。

若其中一个为合数，则因它小于 s^2，必有素因子小于 s。

由于 r, s 连续，该素因子只能不超过 r，矛盾。

反向显然。证毕。

因此：

单个平方视界中的 Twin 是完全有限、精确、零误差的对象。	(19.2)

第二十章　关系死亡留下三原子见证

若旧双逃逸关系不是 Twin，则：

$$n = ru, \qquad n + 2 = v,$$

或：

$$n = v, \qquad n + 2 = ru,$$

其中 u, v 为素数。

因此：

$$\boxed{v = ru \pm 2.} \tag{20.1}$$

所以：

$$\boxed{\text{关系失败不是删除，而是关系身份转换。}} \tag{20.2}$$

死亡关系留下完整有限见证：

$$(r, u, v).$$

第二十一章　单余因子单死亡

固定：

$$r, u > 3.$$

由于：

$$ru \equiv \pm 1 \pmod 3,$$

在：

$$ru - 2, \qquad ru + 2$$

中，至少一个被 3 整除。

因此二者至多一个能够成为大于 3 的素数。

于是：

固定一个当前控制原子 r 和余因子 u，同一视界中 u 至多吸收一条单位差关系。	(21.1)

第二十二章　清洁区与吸收区

平方视界分为：

$$(r^2, rs) \quad \sqcup \quad [rs, s^2).$$

若：

$$r^2 < n < n + 2 < rs$$

并逃过旧历史，则一个复合端点若由 r 吸收，必须为：

$$ru$$

且：

$$u \geq s.$$

于是：

$$ru \geq rs,$$

矛盾。

所以：

清洁区中的旧双逃逸关系直接是真 Twin。 (22.1)

内部吸收只能从：

$$[rs, s^2)$$

开始。

第二十三章　有限吸收资源池

若：

$$ru \in [rs, s^2),$$

则：

$$s \le u < \frac{s^2}{r}.$$

定义：

$$\boxed{U(r,s) = \left\{ u \in \mathbb{P} : s \le u < \frac{s^2}{r} \right\}.} \tag{23.1}$$

若采用包含下平方边界的闭视界，还可定义：

$$\boxed{U_{r,s}^{\text{full}} = \left\{ u \in \mathbb{P} : r \le u < \frac{s^2}{r} \right\}.} \tag{23.2}$$

两种约定只差有限边界层。

因此：

平方视界中的全部吸收能力，在视界打开时已经是有限集合。

(23.3)

第二十四章　死亡匹配与有限强制

记：

$$D_{r,s} = \text{死亡关系数},$$

$$T_{r,s} = \text{真实 Twin 数}.$$

则：

$$\boxed{B_{r,s} = T_{r,s} + D_{r,s}.} \tag{24.1}$$

由单余因子单死亡，可把每一条死亡关系映到其承担吸收的余因子 u。

因此：

$$\boxed{\mathcal{D}_{r,s} \hookrightarrow U_{r,s}^{\text{full}}.} \tag{24.2}$$

所以：

$$\boxed{D_{r,s} \le |U_{r,s}^{\text{full}}|.} \tag{24.3}$$

从而：

$$\boxed{T_{r,s} \ge B_{r,s} - |U_{r,s}^{\text{full}}|.} \tag{24.4}$$

特别地：

$$\boxed{B_{r,s} > |U_{r,s}^{\text{full}}| \Rightarrow T_{r,s} \ge 1.} \tag{24.5}$$

这是单位差的有限窗口强制条件。

第二十五章　局部移动区间

平方视界不是最小可用尺度。

任取：

$$I = [X, Y] \subset [r^2, s^2).$$

定义：

$$B_r(I)$$

为其中的旧双逃逸关系数，

并定义：

$$\boxed{U_r(I) = \{u \in \mathbb{P} : ru \in I \cup (I+2)\}.} \tag{25.1}$$

则同样有：

$$\boxed{T_r(I) \geq B_r(I) - |U_r(I)|.} \tag{25.2}$$

所以：

$$\boxed{B_r(I) > |U_r(I)| \Rightarrow I \text{ 中至少有一对 Twin.}} \tag{25.3}$$

第二十六章　关系空间与资源空间的尺度分离

令：

$$\Delta = s - r.$$

平方视界长度：

$$s^2 - r^2 = \Delta(r + s) \sim 2r\Delta.$$

清洁区长度：

$$\boxed{rs - r^2 = r\Delta.} \tag{26.1}$$

吸收区长度：

$$\boxed{s^2 - rs = s\Delta.} \tag{26.2}$$

余因子资源窗口长度：

$$\boxed{\frac{s^2}{r} - s = \frac{s}{r}\Delta.} \tag{26.3}$$

由 Bertrand 定理：

$$1 < \frac{s}{r} < 2,$$

所以：

$$\boxed{\Delta < \frac{s^2}{r} - s < 2\Delta.} \tag{26.4}$$

于是：

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{关系位置空间尺度} \sim r\Delta,\\ \text{吸收资源窗口尺度} \sim \Delta.\end{array}} \tag{26.5}$$

资源空间比关系位置空间低一个 r 的尺度。

第二十七章　吸收资源的线性上界

因为 u,s 都是奇素数，可写：

$$u = s + 2m.$$

由：

$$u < \frac{s^2}{r}$$

得到：

$$2m < \frac{s}{r}(s - r).$$

所以：

$$\boxed{|U(r,s)| \le \left\lceil \frac{s(s-r)}{2r} \right\rceil}. \tag{27.1}$$

这是一个直接有限上界。

更强的纯结构上界将在一般模板部分给出。

第二十八章　资源半衰

固定历史原子 u。

若它在视界 (r,s) 中具有吸收资格，则：

$$u<\frac{s^2}{r}.$$

等价于：

$$s>\sqrt{ru}.$$

定义：

$$\boxed{d(r,u)=\log\frac{u}{r}.} \tag{28.1}$$

则：

$$\boxed{\log\frac{u}{s}<\frac{1}{2}\log\frac{u}{r}.} \tag{28.2}$$

因此每获得一次新的吸收资格，剩余对数距离至少减半。

定理 28.1　资源半衰定理

若同一个 u 依次在多个前置平方视界中具有吸收资格，则其到自身位置的对数距离以至少二分之一的比例持续缩小。

因此：

同一个历史原子不可能在无穷多个前置平方视界中持续承担吸收角色。

(28.3)

第二十九章　资源寿命

设：

$$u^-$$

为 u 的前一个素数。

定义：

$$\boxed{\mathfrak{Q}_r(u) = \log_2 \frac{\log(u/r)}{\log(u/u^-)}.} \tag{29.1}$$

每获得一次新的吸收资格：

$$\mathfrak{Q}_s(u) < \mathfrak{Q}_r(u) - 1.$$

若：

$$\rho(u)$$

表示 u 在到达自身以前能够进入吸收资源池的次数，则：

$$\boxed{\rho(u) \le 1 + \left\lfloor \log_2 \frac{\log(u/3)}{\log(u/u^-)} \right\rfloor.} \tag{29.2}$$

所以：

$$\boxed{\rho(u) < \infty.} \tag{29.3}$$

并有粗界：

$$\boxed{\rho(u) = O(\log u).} \tag{29.4}$$

因此：

$$\boxed{\text{每一个历史原子都只有有限吸收寿命。}} \tag{29.5}$$

第三十章　有限寿命与全局容量是两个层次

资源寿命定理控制的是：

一个固定资源 u 能够被复用多少次。

而全局无限问题还包含：

随着前沿推进，不断有新的资源进入历史。

因此全局判定必须累计所有资源的可用容量。

设第 j 个平方视界中：

$$B_j = T_j + D_j.$$

跨视界相加：

$$\boxed{\sum_{j=m}^{n} T_j = \sum_{j=m}^{n} B_j - \sum_{j=m}^{n} D_j\,.} \tag{30.1}$$

如果对死亡总量建立统一容量上界：

$$\sum D_j \le \mathcal{C}_{m,n},$$

则：

$$\boxed{\sum_{j=m}^{n} T_j \ge \sum_{j=m}^{n} B_j - \mathcal{C}_{m,n}.} \tag{30.2}$$

这就是从有限寿命进入无限量词所需的真正全局账本。

第四部　一般固定模板的供给—吸收理论

第三十一章　从 Twin 推广到任意固定偏移模板

令：

$$\boxed{H = \{h_1, \dots, h_k\} \subset \mathbb{Z}.} \tag{31.1}$$

通过整体平移可以令：

$$\min H = 0.$$

若目标是充分大的奇素数关系，则全部偏移必须具有相同奇偶性；否则模 2 已经形成局部阻塞。

以下设 H 已经按这一方式规范化。

第三十二章　模板平方视界

取连续奇素数：

$$p < r < s.$$

定义：

$$\boxed{I_H(r,s) = \{n \in 2\mathbb{Z}+1 : r^2 < n + h < s^2 \quad \forall h \in H\}.} \tag{32.1}$$

这表示：

> 整个模板 $n + H$ 都位于同一个开平方视界内部。

开区间约定使下平方边界的有限特殊项与内部资源分离。

第三十三章　关系供给 B_H

定义旧历史供给集：

$$\boxed{\mathcal{B}_H(r,s)=\{n\in I_H(r,s):P^-(n+h)\geq r\quad \forall h\in H\}.} \tag{33.1}$$

并定义：

$$\boxed{B_H(r,s)=|\mathcal{B}_H(r,s)|.} \tag{33.2}$$

它数的是：

> 已经同时逃过全部旧控制素数 $q<r$ 的完整关系模板。

这里的“供给”是关系供给，而不是单个整数供给。

第四篇的 CRT 生存树已经把“逃过旧控制素数”写成有限联合存活相位。设：

$$S_{<r}=\{q\in\mathbb{P}:q<r\},$$

并把对应联合允许相位记为：

$$A_{<r}(H).$$

那么：

$$\boxed{\mathcal{B}_H(r,s)=\text{CRT 联合存活枝在平方视界中的实际整数实现.}} \tag{33.3}$$

因此必须区分：

$$|A_{<r}(H)|$$

与：

$$B_H(r,s).$$

前者是有限模相位容量；后者是这些相位在当前实际整数窗口中的完整关系供给。

所以：

CRT 生存树给出许可枝；B_H 给出许可枝在真实视界中的关系实现。 (33.4)

第三十四章　真实关系 T_H 与死亡 D_H

定义：

$$\boxed{\mathcal{T}_H(r,s) = \{n \in I_H(r,s) : n + h \in \mathbb{P} \quad \forall h \in H\}.} \tag{34.1}$$

记：

$$\boxed{T_H(r,s) = |\mathcal{T}_H(r,s)|.} \tag{34.2}$$

定义死亡集：

$$\boxed{\mathcal{D}_H(r,s) = \mathcal{B}_H(r,s) \backslash \mathcal{T}_H(r,s),} \tag{34.3}$$

以及：

$$\boxed{D_H(r,s) = B_H(r,s) - T_H(r,s).} \tag{34.4}$$

因此：

$$\boxed{B_H = T_H + D_H.} \tag{34.5}$$

用关系字母表记录终端身份，可写成：

$$\boxed{\mathcal{B}_H(r,s) = \mathcal{B}_H^{\mathrm{all\,A}}(r,s) \sqcup \mathcal{B}_H^{\mathrm{death}}(r,s).} \tag{34.6}$$

其中：

$$|\mathcal{B}_H^{\mathrm{all\,A}}| = T_H, \qquad |\mathcal{B}_H^{\mathrm{death}}| = D_H.$$

一般模板的死亡身份字可以包含一个或多个 $\mathcal{M}_r$ 端点。本篇的容量问题正是：这些死亡身份字最多能够消耗多少有限资源。

第三十五章　单层净化的一般形式

设：

$$r \geq 5.$$

取：

$$n \in \mathcal{B}_H(r,s)$$

但：

$$n \notin \mathcal{T}_H(r,s).$$

则至少存在一个端点：

$$n + h_j$$

为合数。

因为它已逃过全部：

$$q < r$$

的素因子，所以：

$$P^-(n + h_j) \geq r.$$

又由于：

$$n + h_j < s^2,$$

若最小素因子大于 r，则至少为 s，从而合数至少为：

$$s^2,$$

矛盾。

所以：

$$\boxed{P^-(n + h_j) = r.} \tag{35.1}$$

于是：

$$n + h_j = ru.$$

因为：

$$n + h_j > r^2,$$

所以：

$$u > r.$$

连续素数性给出：

$$u \geq s.$$

若 u 为合数，则其最小素因子至少为 r，所以：

$$u \geq r^2,$$

从而：

$$n + h_j = ru \geq r^3.$$

又由 Bertrand：

$$s < 2r,$$

故对 $r \geq 5$：

$$r^3 > 4r^2 > s^2,$$

矛盾。

因此：

$$\boxed{u \in \mathbb{P}.} \tag{35.2}$$

并且：

$$\boxed{s \leq u < \frac{s^2}{r}.} \tag{35.3}$$

所以所有内部死亡都必须消耗一个有限素数资源。

第三十六章　统一吸收资源池

定义：

$$\boxed{U(r,s)=\left\{u\in\mathbb{P}:s\le u<\frac{s^2}{r}\right\}.} \tag{36.1}$$

这一资源池只依赖平方视界，而不依赖具体模板 H。

模板决定的是：

> 一个给定资源 u 最多可以通过多少个端点角色吸收关系。

这正是吸收复用度的来源。

第三十七章　wheel 与吸收复用度

取一个有限素数集合：

$$\boxed{Q \subset \{q \in \mathbb{P} : q < r\}.} \tag{37.1}$$

定义：

$$\boxed{M_Q = \prod_{q \in Q} q\,.} \tag{37.2}$$

设某个死亡关系通过端点 j 被当前素数 r 吸收：

$$n + h_j = ru.$$

则对另一个端点 $i \neq j$：

$$n + h_i = ru + h_i - h_j.$$

由于整个关系属于旧历史供给集，对每个：

$$q \in Q$$

都必须有：

$$q \nmid ru + h_i - h_j.$$

令：

$$c \equiv ru \pmod{M_Q}.$$

因为 $q < r \leq u$ 且 r, u 都不是 Q 中的素数，有：

$$\gcd(c, M_Q) = 1.$$

定义：

$$\boxed{J_H(c; Q) = \{j : \gcd(c + h_i - h_j, M_Q) = 1 \quad \forall i \neq j\}.} \tag{37.3}$$

再定义：

$$\boxed{\mu_H(Q) = \max_{c \in (\mathbb{Z}/M_Q\mathbb{Z})^\times} |J_H(c; Q)|.} \tag{37.4}$$

称为模板 H 在 wheel Q 下的**吸收复用度**。

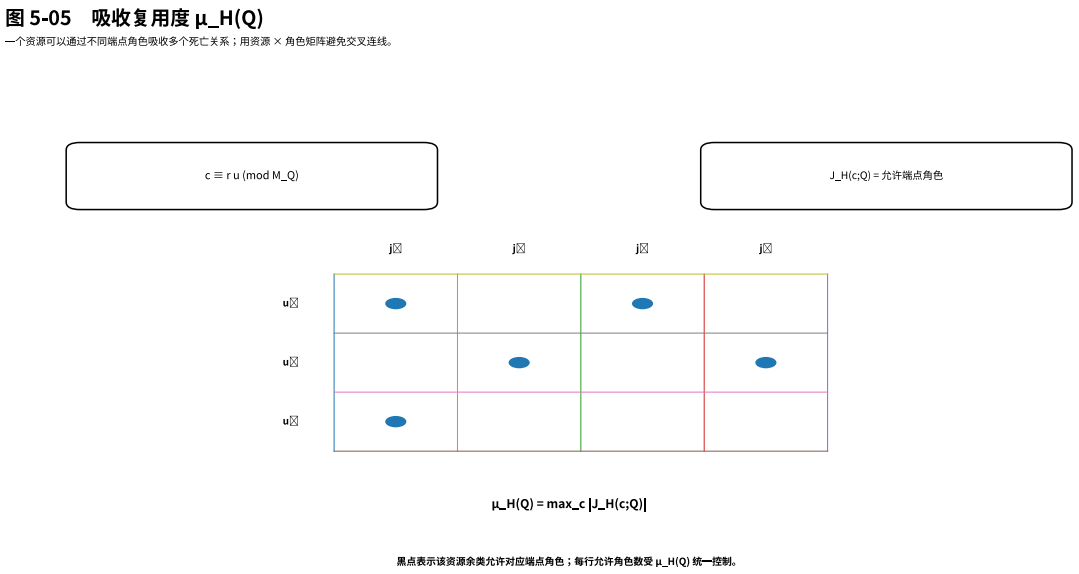


图 5-05　吸收复用度 μ_H(Q)。 对 wheel Q，资源 u 对应余类 $c \equiv ru \pmod{M_Q}$。允许该资源通过哪些端点角色 j 吸收死亡关系，由 $J_H(c;Q)$ 决定；模板复用度 $\mu_H(Q) = \max_c |J_H(c;Q)|$ 因而控制单个资源最多能够承担多少关系死亡。由此得到 $D_H(r,s) \le \mu_H(Q)|U(r,s)|$。

第三十八章　吸收容量定理

定理 38.1　模板死亡容量上界

对 $r \geq 5$：

$$\boxed{D_H(r,s) \leq \mu_H(Q)\,|U(r,s)|.} \tag{38.1}$$

证明

对每一个死亡关系 n，选择一个最小编号的死亡端点 j，使：

$$n + h_j = ru$$

其中：

$$u \in U(r,s).$$

映射：

$$n \mapsto (u,j).$$

固定 (u,j) 时：

$$n = ru - h_j$$

唯一，所以该映射为单射到所有允许资源—角色对的集合。

对固定 u，令：

$$c \equiv ru \pmod{M_Q}.$$

由于关系在旧控制层中全部幸存，端点角色 j 必须属于：

$$J_H(c;Q).$$

所以固定 u 最多允许：

$$|J_H(c;Q)| \leq \mu_H(Q)$$

个吸收角色。

对全部：

$$u \in U(r,s)$$

求和，得到：

$$D_H(r,s) \leq \mu_H(Q)|U(r,s)|.$$

证毕。

这一定理把一个可能复杂的死亡关系集合压缩成：

有限资源数 × 最大复用度.

图 5-04　关系供给—吸收账本

一个平方视界内，关系供给先分成真实关系与死亡关系；只有死亡关系进入吸收资源账本。

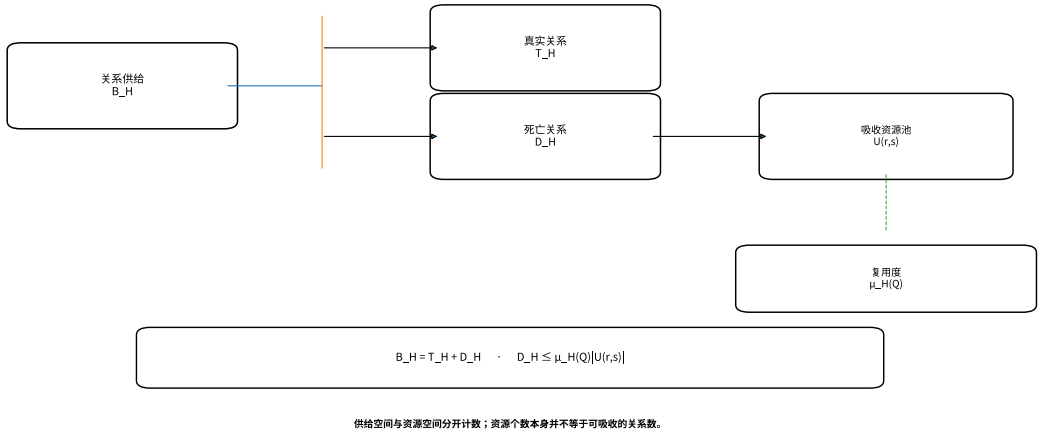


图 5-04　关系供给—吸收账本。 单个平方视界中，许可关系供给 B_H 分成真实关系 T_H 与死亡关系 D_H。死亡关系必须由有限资源池 $U(r,s)$ 吸收；模板在 wheel Q 下的复用度 $\mu_H(Q)$ 控制总吸收容量。

第三十九章　资源池的纯结构上界

记：

$$\Delta = s - r.$$

由 Bertrand：

$$s < 2r.$$

因此：

$$\frac{s^2}{r} = s + \frac{s\Delta}{r} < s + 2\Delta.$$

所以：

$$U(r,s)$$

中的素数只能出现在：

$$s,\ s+2, \dots, s+2(\Delta-1)$$

这至多 Δ 个奇数位置中。

若：

$$\Delta \geq 4,$$

前三个奇数：

$$s,\ s+2,\ s+4$$

中必有一个被 3 整除；由于 $s > 3$，该位置不可能是素数。

若：

$$\Delta = 2$$

且 $r \geq 5$，则：

$$r,\ s = r+2,\ s+2 = r+4$$

三个连续奇数中有一个被 3 整除，而 r, s 均为大于 3 的素数，所以：

$$s+2$$

必为合数。

因此：

$$\boxed{|U(r,s)| \leq \Delta - 1 \qquad (r \geq 5).} \tag{39.1}$$

最小平方视界 $r = 3, s = 5$ 是有限边界项，可直接计算。

第四十章　精确容量与结构容量

定义：

$$\boxed{C_H^{\text{exact}}(r,s;Q)=\mu_H(Q)|U(r,s)|.} \tag{40.1}$$

它使用固定谱中真实的资源数。

定义：

$$\boxed{C_H^{\text{struct}}(r,s;Q)=\mu_H(Q)(\Delta-1).} \tag{40.2}$$

它只使用相邻素数 gap 与模板复用度。

由定理 39.1：

$$\boxed{C_H^{\text{exact}}\le C_H^{\text{struct}}.} \tag{40.3}$$

图 5-06　精确容量与结构容量

精确容量使用真实资源数 |U(r,s)|；结构容量只使用相邻素数 gap Δ 与复用度 μ_H(Q)，并给出可证明的上界。

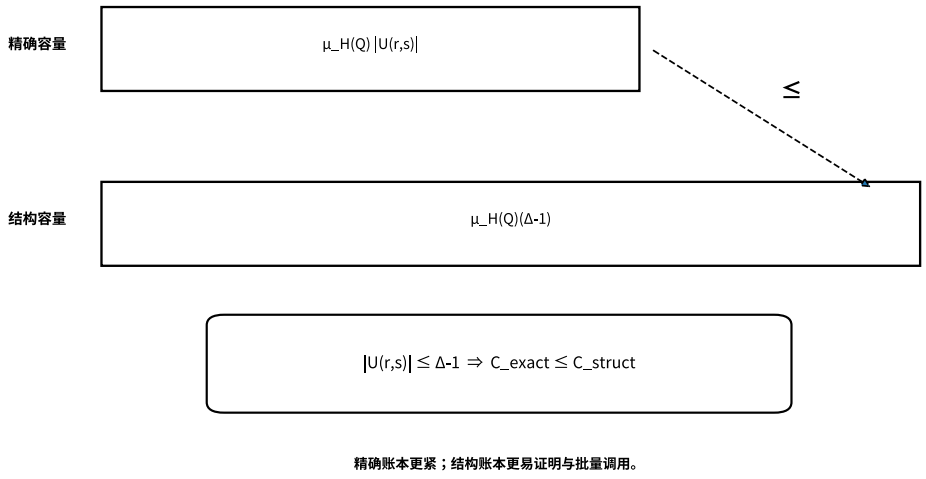


图 5-06　精确容量与结构容量。 精确容量 $C_H^{\text{exact}}(r,s;Q)=\mu_H(Q)|U(r,s)|$ 使用固定谱中的真实资源数；结构容量 $C_H^{\text{struct}}(r,s;Q)=\mu_H(Q)(\Delta-1)$ 只使用相邻素数 gap $\Delta=s-r$ 与复用度。由 $|U(r,s)|\le\Delta-1$ 得 $C_H^{\text{exact}}\le C_H^{\text{struct}}$。

第四十一章　净关系势

定义：

$$\boxed{e_H^{\text{exact}} = B_H - C_H^{\text{exact}},} \tag{41.1}$$

$$\boxed{e_H^{\text{struct}} = B_H - C_H^{\text{struct}}.} \tag{41.2}$$

由：

$$B_H = T_H + D_H$$

和：

$$D_H \le C_H^{\text{exact}} \le C_H^{\text{struct}},$$

得到：

定理 41.1　单视界净关系势下界

$$\boxed{T_H \ge e_H^{\text{exact}} \ge e_H^{\text{struct}}.} \tag{41.3}$$

特别地：

$$\boxed{e_H^{\text{exact}} > 0 \Rightarrow T_H \ge 1,} \tag{41.4}$$

以及：

$$\boxed{e_H^{\text{struct}} > 0 \Rightarrow T_H \ge 1.} \tag{41.5}$$

因为 T_H 为整数，任何严格正净势都会留下至少一条真实全原子关系。

图 5-07　单视界净关系势

净势是关系供给减去可证明的最大吸收容量；正、零、负三种状态对应不同的单视界结论。

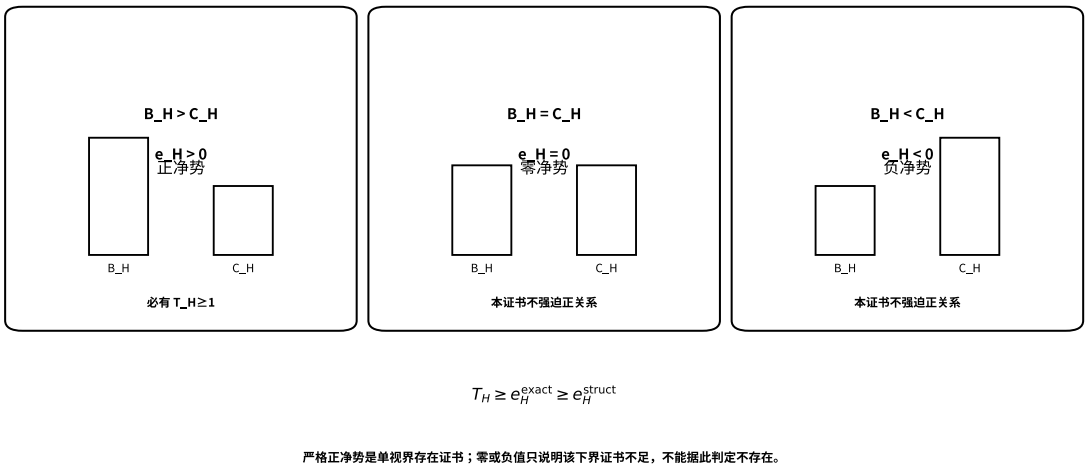


图 5-07　单视界净关系势。 单视界净关系势定义为 $e_H^{\mathrm{exact}} = B_H - C_H^{\mathrm{exact}}$ 与 $e_H^{\mathrm{struct}} = B_H - C_H^{\mathrm{struct}}$，并满足 $T_H \geq e_H^{\mathrm{exact}} \geq e_H^{\mathrm{struct}}$。因此严格正净势直接给出 $T_H \geq 1$ 的有限存在证书；零或负值只说明这个下界证书不足，不能据此推出关系不存在。

第四十二章　两种有限关系证书

由此得到两个标准有限证书。

42.1　固定谱资源证书

若：

$$\boxed{B_H > \mu_H(Q)|U|,} \tag{42.1}$$

则：

$$T_H \geq 1.$$

它使用当前固定谱中的真实资源数。

42.2　结构证书

若：

$$\boxed{B_H > \mu_H(Q)(\Delta - 1),} \tag{42.2}$$

则：

$$T_H \geq 1.$$

它不需要枚举 U 中的实际素数，只使用：

- 关系供给 B_H；
- 模板复用度 $\mu_H(Q)$；
- 相邻素数 gap Δ。

因此：

结构证书比固定谱资源证书更粗， 但更接近可批量运输的统一形式。

(42.3)

两类证书具有同一个逻辑形状：

$$\boxed{\text{有限输入数据} + \text{已证容量上界} \Rightarrow \text{当前关系 fiber 非空.}} \tag{42.4}$$

所以证书一旦建立，就可以被更高层的形式证明直接调用。

第四十三章　吸收复用度的几个基本值

取：

$$Q = \{3,5\}.$$

对若干常见模板可直接计算：

$$\boxed{\mu_{\{0,2\}} = 1,}$$

$$\boxed{\mu_{\{0,4\}} = 1,}$$

$$\boxed{\mu_{\{0,6\}} = 2,}$$

$$\boxed{\mu_{\{0,2,6\}} = 2,}$$

$$\boxed{\mu_{\{0,2,6,8\}} = 1.}$$

这些数值说明：

> 模板端点越多，不意味着同一个吸收资源可以任意多次复用。

模板内部差值结构会限制吸收角色。

第四十四章　Twin 是 $\mu = 1$ 的最小模型

取：

$$H = \{0,2\}.$$

对：

$$Q = \{3,5\},$$

有：

$$\mu_H(Q) = 1.$$

因此：

$$\boxed{D_{r,s} \leq |U(r,s)|.} \tag{44.1}$$

并且：

$$\boxed{T_{r,s} \geq B_{r,s} - |U(r,s)|.} \tag{44.2}$$

再由：

$$|U(r,s)| \leq \Delta - 1,$$

得到：

$$\boxed{T_{r,s} \geq B_{r,s} - (\Delta - 1).} \tag{44.3}$$

“单余因子单死亡”因此成为一般模板容量定理中的：

$$\boxed{\mu_{\{0,2\}} = 1.}$$

第五部　从单视界到无限回归

第四十五章　跨视界累计账本

把平方视界依次编号：

$$W_1, W_2, \dots$$

对固定模板 H，记：

$$B_{H,j},\quad T_{H,j},\quad D_{H,j},$$

$$C_{H,j}^{\mathrm{exact}},\quad C_{H,j}^{\mathrm{struct}},$$

$$e_{H,j}^{\mathrm{exact}},\quad e_{H,j}^{\mathrm{struct}}.$$

逐窗有：

$$T_{H,j} \geq e_{H,j}^{\mathrm{exact}} \geq e_{H,j}^{\mathrm{struct}}.$$

定义累计真实关系数：

$$\boxed{\mathcal{T}_H(N) = \sum_{j \leq N} T_{H,j}\,.} \tag{45.1}$$

定义累计净势：

$$\boxed{\mathcal{E}_H^{\mathrm{exact}}(N) = \sum_{j \leq N} e_{H,j}^{\mathrm{exact}},} \tag{45.2}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_H^{\mathrm{struct}}(N) = \sum_{j \leq N} e_{H,j}^{\mathrm{struct}}.} \tag{45.3}$$

逐项相加：

$$\boxed{\mathcal{T}_H(N) \geq \mathcal{E}_H^{\mathrm{exact}}(N) \geq \mathcal{E}_H^{\mathrm{struct}}(N).} \tag{45.4}$$

第四十六章　累计净势无限判据

定理 46.1　精确资源无限判据

若：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty}\mathcal{E}_H^{\mathrm{exact}}(N)=+\infty,} \tag{46.1}$$

则模板 H 的全原子关系无限回归。

证明

由：

$$\mathcal{T}_H(N)\geq\mathcal{E}_H^{\mathrm{exact}}(N),$$

右侧上极限为 $+\infty$，所以：

$$\mathcal{T}_H(N)$$

无界。

由无限回归计数判据，真实关系出现无限多次。证毕。

定理 46.2　结构无限判据

若：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty}\mathcal{E}_H^{\mathrm{struct}}(N)=+\infty,} \tag{46.2}$$

则模板 H 的全原子关系无限回归。

证明

由：

$$\mathcal{E}_H^{\mathrm{exact}}(N)\geq\mathcal{E}_H^{\mathrm{struct}}(N),$$

立即归结为定理 46.1。证毕。

这是本篇从有限关系筛进入无限量词的核心桥梁。

它把无限性压缩成：

$$\boxed{\text{有限关系净势的累计是否无界。}} \tag{46.3}$$

图 5-08　累计净势与无限回归

单视界净势 e_j=B_j-C_j；跨视界累加后，累计证书决定是否进入无限回归。

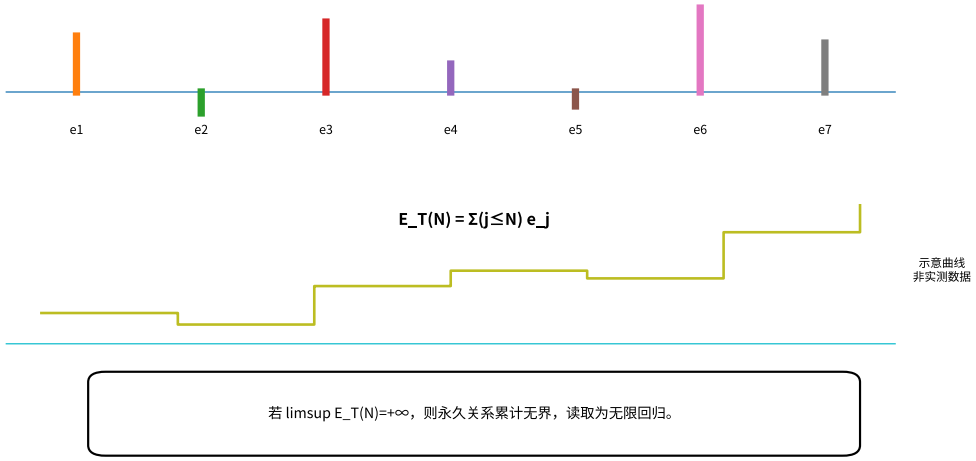


图 5-08　累计净势与无限回归。 每个视界产生单层净势 $e_j = B_j - C_j$，跨视界形成累计账本 $\mathcal{E}_T(N) = \sum_{j \le N} e_j$。当累计净势无界时，永久关系累计数无界，从有限证书进入无限回归量词。

第四十七章　更强的逐窗证书

若从某个视界以后：

$$e_{H,j}^{\mathrm{struct}} > 0$$

对每个 j 成立，则每一个后续平方视界都至少含一条真实关系。

这显然推出无限回归。

更弱地，只要：

$$e_{H,j}^{\mathrm{exact}} > 0$$

在无穷多个 j 上成立，也足以推出无限回归。

累计净势判据更一般，因为它允许某些窗口净势为负，只要求长期累计不被压住。

第四十八章　“没有最后一个成功视界”的等价形式

对固定模板 H，以下三件事等价：

1. H 关系无限回归；
2. $\mathcal{T}_H(N)$ 无界；
3. 对任意 K，都存在 $j > K$ 使：

$$T_{H,j} > 0.$$

因此：

$$\boxed{\text{无限回归} \quad = \quad \text{不存在最后一个产生新真实关系的平方视界。}} \tag{48.1}$$

这句话现在具有严格计数含义，而不是直觉表述。

第四十九章　单资源寿命在累计架构中的准确位置

资源半衰与有限寿命仍然非常重要。

它们说明：

任何一个既有资源都不可能永久承担无限吸收责任。

但随着前沿推进，新资源也会不断进入历史。

因此累计容量需要同时记录：

资源出生 + 单资源复用次数 + 模板复用度 + 视界资源池.

于是：

单资源寿命控制纵向复用； 累计净势控制横向新资源总容量。

(49.1)

二者共同构成持续非灭绝型关系筛的完整资源账本。

第五十章　局部许可、有限净势与无限回归是三层不同结论

对固定模板 H，三个层次必须分开。

第一层　局部许可

$$\nu_H(q) < q \quad \forall q.$$

它只说明不存在一个局部素数层完全封死整个模板。

第二层　有限视界证书

$$e_H^{\text{exact}} > 0$$

或：

$$e_H^{\text{struct}} > 0.$$

它说明某个具体平方视界中至少有一条真实关系。

第三层　无限回归

$$\limsup \mathcal{E}_H(N) = +\infty.$$

它说明真实关系总数无界。

因此：

$$\boxed{\text{局部许可} \not\equiv \text{有限命中} \not\equiv \text{无限回归.}} \tag{50.1}$$

统一理论的作用是给三层之间建立精确接口。

第六部　Twin 在精准无限架构中的位置

第五十一章　Twin 的完整有限状态

对每个平方视界，Twin 的数据可以压缩为：

$$\boxed{(r, s, \Delta, B, U, \mu, C_{\text{exact}}, C_{\text{struct}}, e_{\text{exact}}, e_{\text{struct}}, T, D).} \tag{51.1}$$

其中：

- r, s：连续控制素数；
- $\Delta = s - r$：prime gap；
- B：旧双逃逸关系供给；
- U：内部吸收资源数；
- $\mu = 1$：单位差模板吸收复用度；
- $C_{\text{exact}} = |U|$；
- $C_{\text{struct}} = \Delta - 1$；
- $e_{\text{exact}} = B - |U|$；
- $e_{\text{struct}} = B - (\Delta - 1)$；
- T：真实 Twin 数；
- $D = B - T$：真实死亡数。

这就是单位差无限接口的完整逐窗记录。

第五十二章　Twin 的全局命题怎样表达

定义：

$$\boxed{\mathcal{T}(N)=\sum_{j\le N}T_j\,.} \tag{52.1}$$

则 Twin 的无限回归形式为：

$$\boxed{\mathcal{T}(N)\text{ 无界.}} \tag{52.2}$$

等价地：

$$\boxed{\forall K,\ \exists j>K{:}T_j>0.} \tag{52.3}$$

而供给—吸收框架给出充分判据：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty}\sum_{j\le N}\left(B_j-|U_j|\right)=+\infty} \tag{52.4}$$

或更强的纯结构形式：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty}\sum_{j\le N}\left(B_j-(\Delta_j-1)\right)=+\infty.} \tag{52.5}$$

这就是 Twin 在统一无限架构中的精准位置。

第五十三章　一般固定差

对任意固定：

$$h \geq 1,$$

定义：

$$\Gamma^{[h]} = \{r: \delta(r) = h\}.$$

普通素数差为：

$$2h.$$

一般固定差可以沿以下顺序建立持续型关系筛：

1. 构造适配平方视界；
2. 定义旧历史关系供给；
3. 识别最后控制层的死亡形式；
4. 建立有限吸收资源池；
5. 计算模板吸收复用度；
6. 得到逐窗容量上界；
7. 定义净关系势；
8. 累计净势；
9. 使用无限回归判据。

因此：

Twin 是一般固定差持续型关系筛的最小模型。	(53.1)

第五十四章　一般 prime tuple

对：

$$H = \{h_1, \dots, h_k\},$$

关系为：

$$R_H(n) = \prod_{j=1}^{k} \alpha\,(n + h_j).$$

先检查局部阻塞：

$$\nu_H(q) = q$$

是否发生。

若发生，则无限回归被局部结构关闭，只剩有限边界例外。

若模板通过局部许可，则进入：

$$\boxed{B_H \to U \to \mu_H \to C_H \to e_H \to \mathcal{E}_H.} \tag{54.1}$$

于是一般 tuple 的无限回归获得与 Twin 相同的标准接口。

图 5-10　一般固定模板 H 的供给—吸收框架

Twin 只是 H={0,2} 的最小实例；一般模板共享三段式执行：模板控制 → 视界账本 → 容量与累计。

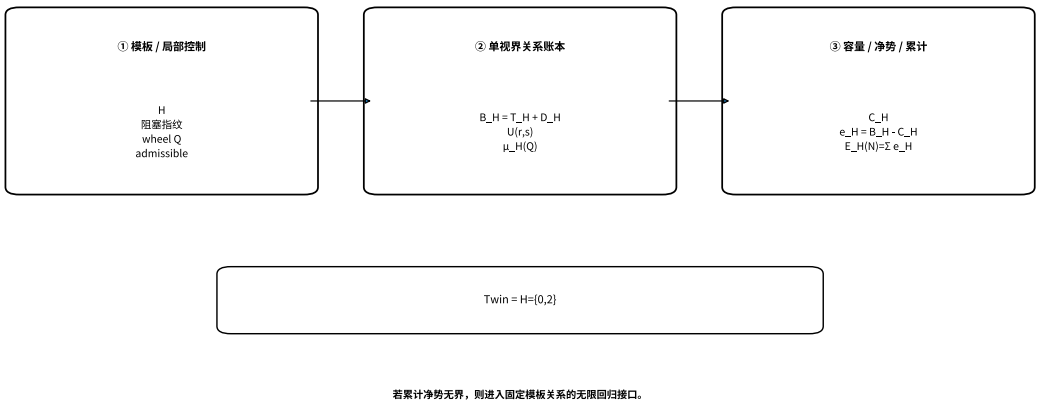


图 5-10　一般固定模板 H 的供给—吸收框架。 Twin 的 $H = \{0,2\}$ 只是一般固定偏移模板的最小实例。通过局部许可与 wheel Q 后，模板统一进入 $B_H = T_H + D_H$、资源池 $U(r,s)$、复用度 $\mu_H(Q)$、容量 C_H、净势 e_H 与累计量 $\mathcal{E}_H$ 的供给—吸收链；累计净势无界时再进入固定模板关系的无限回归接口。

第七部　其他无限接口的批量结构

第五十五章　Sophie Germain

定义：

$$\boxed{SG(p) = \alpha(p)\alpha(2p+1).} \tag{55.1}$$

其无限形式为：

$$\boxed{\exists^{\infty} p : SG(p) = 1.} \tag{55.2}$$

因此标准接口是：

$$\boxed{C_{SG}(X) = \sum_{p \le X} S\,G(p)}$$

是否无界。

它与 Twin 都属于：

INF_RECURRENCE,

但位置映射不同，所以有限控制几何与吸收结构也不同。

第五十六章　Mersenne

对素数指数 p，定义：

$$\boxed{M(p) = \alpha(2^p - 1).} \tag{56.1}$$

若询问 Mersenne 素数是否无限多，则：

$$\boxed{C_M(X) = \sum_{\substack{p \le X \\ p \in \mathbb{P}}} M\,(p)} \tag{56.2}$$

必须无界。

这里关系位置沿指数映射：

$$p \mapsto 2^p - 1$$

高速增长，不适合普通平方模板窗口，但量词接口仍然相同：

$$\boxed{\text{INF_RECURRENCE.}}$$

所以：

$$\boxed{\text{统一的是无限判据；　　有限认证工具可以随关系轨道改变。}} \tag{56.3}$$

第五十七章　Bunyakovsky 与 Schinzel H

给定整数值多项式：

$$f(n),$$

定义：

$$R_f(n) = \alpha(f(n)).$$

无限形式仍是：

$$\exists^{\infty} n : R_f(n) = 1,$$

即：

$$\sum_{n \le X} R_f\,(n)$$

无界。

对多项式束：

$$f_1, \dots, f_k,$$

定义：

$$R_{\boldsymbol{f}}(n) = \prod_j \alpha\,(f_j(n)).$$

首先检查局部完全覆盖：

> 是否存在素数 q，使每一个输入余类都至少令一个 $f_j(n) \equiv 0 \pmod q$。

若存在，则无限全素数回归被局部阻塞。

否则再进入全局无限接口。

第五十八章　Green–Tao 的任意长度接口

定义：

$$C_k(a,h)=\prod_{j=0}^{k-1}\alpha\,(a+jh).$$

其量词为：

$$\forall k\ \exists a,h\colon C_k(a,h)=1.$$

这不是固定 k 的无限回归。

它要求：

$$\boxed{L(X)=\max\{k\colon \exists a,h \text{ 在视界 } X \text{ 内实现}\}}$$

无界。

因此：

$$\boxed{\text{ARBITRARILY_LONG}}$$

有自己的标准判据。

第五十九章　Goldbach、Legendre 与全称型接口

Goldbach：

$$\forall N\ \exists p: R_N(p) = 1$$

属于：

$$\mathrm{UNIVERSAL_FIBER}.$$

Legendre：

$$\forall n\ \exists p \in (n^2, (n+1)^2)$$

属于：

$$\mathrm{WINDOW_UNIVERSAL}.$$

它们与持续非灭绝型的区别可以压缩成：

全称型	无限回归型
每个参数必须成功	成功次数必须无界
不能漏一个 fiber	允许任意大空隙
目标：逐 fiber 正下界	目标：累计量无界

(59.1)

第六十章　Brocard、Andrica、Firoozbakht 与 Grimm

这些问题的量词形态为：

$$\forall n, \quad P(n).$$

因此标准失败计数是：

$$\boxed{F(X) = \sum_{n \le X} \mathbf{1}_{\{\neg P(n)\}}.} \tag{60.1}$$

全称命题等价于：

$$\boxed{F(X) = 0 \quad \forall X.} \tag{60.2}$$

对这类问题，增加成功计数没有意义。

真正要控制的是：

$$\boxed{\text{失败是否永远不出现。}}$$

第六十一章　Erdős–Woods 与身份块分离

定义因子身份块：

$$B_K(x) = (\mathrm{PF}(x), \dots, \mathrm{PF}(x+K-1)).$$

这类问题不问“关系是否出现无限多次”，而问：

> 多长的完整因子身份块足以区分两个不同起点？

因此标准接口是寻找：

$$\boxed{K_*}$$

使：

$$x \neq y \Rightarrow B_{K_*}(x) \neq B_{K_*}(y).$$

这是：

$$\boxed{\text{BLOCK_SEPARATION.}}$$

第八部　批量论证的标准结构

第六十二章　批量证明不是批量计算

有限计算可以一次处理：

$$10^3,\ 10^6,\ 10^9$$

个实例。

但只要参数集合仍是有限的，它给出的仍然是有限事实。

批量论证要求：

$$\boxed{\text{同一个规则适用于任意参数。}}$$

因此一个完整的批量证书必须同时满足：

$$\boxed{\text{关系保真} + \text{局部正确} + \text{参数覆盖} + \text{量词闭合}.} \tag{62.1}$$

第三篇已经把命题写成标准关系量词；第四篇把有限关系筛成终端身份；本篇提供可直接进入量词层的证书函数。

所以：

$$\boxed{\text{经典命题的关系标准形} \Leftarrow \text{量词闭合器} \Leftarrow \text{有限证书族}.} \tag{62.2}$$

第六十三章　无限回归的三种标准闭合

63.1　逐窗正证书

若无穷多个窗口满足：

$$e_j > 0,$$

则无穷多个窗口含真实关系。

63.2　累计净势

若：

$$\limsup_{N} \sum_{j \le N} e_j = +\infty,$$

则累计真实关系数无界。

63.3　直接累计下界

若存在无界函数：

$$L(N)$$

使：

$$\sum_{j \le N} T_j \ge L(N),$$

则无限回归成立。

三者从强到弱具有不同适用范围。

第六十四章　全称型的三种标准闭合

64.1　统一正下界

$$C(\theta) \geq L(\theta) > 0.$$

64.2　有限商覆盖

若所有参数落入有限状态类，而每个状态类都保证非空，则全称成立。

64.3　最小失败排除

若参数良序，假设存在最小失败参数，并由历史结构推出其也必须成功，则失败集合为空。

第六十五章　任意长度型的标准闭合

要证明：

$$\forall k\ \exists \Theta, x,$$

只需构造对每个 k 都有效的证书。

也可以证明：

$$L(X)$$

无界。

这里不要求固定 k 的关系无限出现。

所以：

任意长度与无限回归是两个正交方向。 (65.1)

第六十六章　参数无限型的标准闭合

若参数本身为：

$$\theta_1, \theta_2, \ldots$$

定义成功参数累计数：

$$P(N).$$

只要：

$$P(N)$$

无界，就得到参数无限。

这适合：

> 每个成功参数只需要一个 witness，但成功参数本身要求无限多。

第九部　关系级有限证书

图 5-11　关系级证书数据结构

把证明对象、有限视界、关系供给、死亡责任、吸收容量、净势与全局量词放进同一可复核记录。

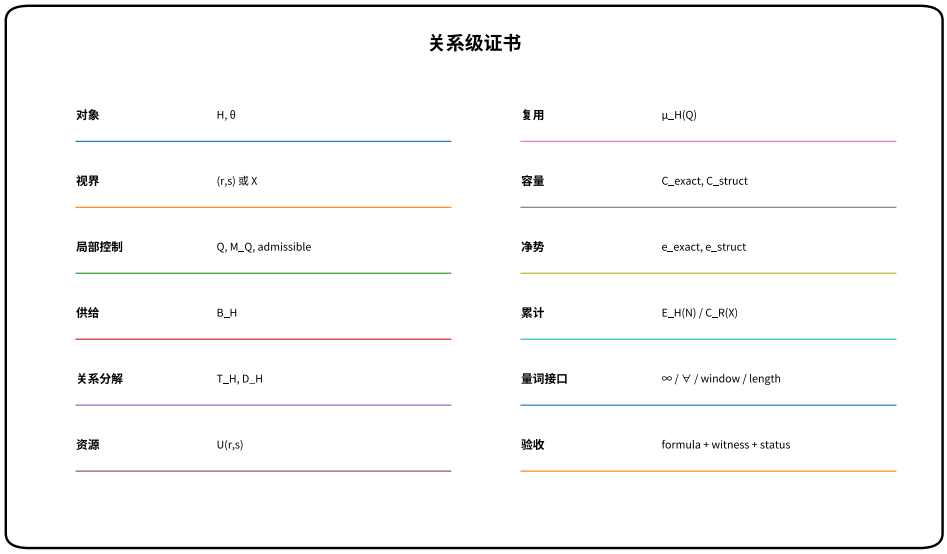


图 5-11　关系级证书数据结构。 关系级证书把模板或关系参数、有限视界、wheel 与局部许可、供给 B_H、真实/死亡分解 T_H, D_H、资源池 U、复用度 μ_H、精确/结构容量、净势、累计量、量词接口与验收状态组织在同一记录中。证书粒度应与关系对象粒度一致，以便人工复核与机器验证共享同一数学对象。

第六十七章　关系对象与证书对象应该一致

对一个给定巨大单位差候选：

$$(M-1, M+1),$$

如果证明对象是整个关系，那么最自然的证书也应尽量共享：

- 同一个中心；
- 同一个模数；
- 同一个 Lucas 系统；
- 同一个群阶约束。

因此：

关系对象的认证粒度，应当与关系对象本身一致。	(67.1)

第六十八章　一般 Twin 单关系证书

令：

$$M > 4$$

为偶数。

定义：

$$\boxed{K = (M-1)(M+1) = M^2 - 1.} \tag{68.1}$$

取 Lucas 序列：

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 1,$$

$$\boxed{U_{n+2} = P\,U_{n+1} - Q\,U_n.} \tag{68.2}$$

判别式：

$$D = P^2 - 4Q.$$

定理 68.1　一般 Twin 单关系证书

假设 M 的完整素因子分解已知，并满足：

$$\boxed{\gcd(K, 2QD) = 1,} \tag{68.3}$$

$$\boxed{U_M(P,Q) \equiv 0 \pmod{K},} \tag{68.4}$$

并且对 M 的每一个不同素因子 q：

$$\boxed{\gcd(U_{M/q}(P,Q), K) = 1.} \tag{68.5}$$

则：

$$\boxed{M-1, \qquad M+1}$$

同时为素数。

证明

任取：

$$\ell \mid K$$

的素因子。

由：

$$U_M \equiv 0 \pmod{\ell}$$

可知 Lucas 出现阶：

$$\rho_\ell \mid M.$$

而：

$$\ell \nmid U_{M/q}$$

对每个不同素因子 $q \mid M$ 成立，所以：

$$\rho_\ell = M.$$

Lucas 出现阶满足：

$$\rho_\ell \mid \ell - \left(\frac{D}{\ell}\right).$$

因此：

$$M \mid \ell \pm 1.$$

若：

$$\ell \mid M - 1,$$

则：

$$\ell \leq M - 1.$$

结合：

$$\ell \equiv \pm 1 \pmod{M},$$

只能：

$$\ell = M - 1.$$

所以：

$$M - 1$$

为素数。

若：

$$\ell \mid M + 1,$$

同理候选只有：

$$M - 1, \quad M + 1.$$

又因为：

$$\gcd(M - 1, M + 1) = 1,$$

奇素因子不能同时等于 $M - 1$。

故：

$$\ell = M + 1.$$

所以：

$$M+1$$

也为素数。证毕。

第六十九章　足厚单主链证书

设：

$$\boxed{M = k2^e,} \tag{69.1}$$

其中 k 为正奇数。

令：

$$F = 2^e,$$

$$N_- = M - 1, \qquad N_+ = M + 1.$$

取 Lucas V-序列：

$$V_0 = 2, \qquad V_1 = P,$$

$$\boxed{V_{n+2} = PV_{n+1} - QV_n.} \tag{69.2}$$

定理 69.1　足厚单主链 Twin 证书

若：

$$\boxed{F > k + 2,} \tag{69.3}$$

$$\boxed{\gcd(N_-N_+, 2QD) = 1,} \tag{69.4}$$

并且：

$$\boxed{V_{M/2}(P, Q) \equiv 0 \pmod{N_-},} \tag{69.5}$$

$$\boxed{V_{M/2}(P, Q) \equiv 0 \pmod{N_+},} \tag{69.6}$$

则：

$$\boxed{M - 1, \qquad M + 1}$$

同时为素数。

证明

任取 N_- 或 N_+ 的素因子 ℓ。

由：

$$V_{M/2} \equiv 0 \pmod{\ell}$$

可得对应特征根比 z 满足：

$$z^{M/2} = -1, \qquad z^M = 1.$$

若其乘法阶为 R_ℓ，则：

$$R_\ell \mid M, \qquad R_\ell \nmid M/2.$$

因为：

$$M = k2^e, \qquad k \text{ 为奇数},$$

所以：

$$2^e \mid R_\ell.$$

Lucas 群阶约束给出：

$$R_\ell \mid \ell - \left(\frac{D}{\ell}\right).$$

于是：

$$\ell \geq F - 1.$$

若 $N_\pm$ 合数，则至少有两个计重数素因子，所以：

$$N_\pm \geq (F-1)^2.$$

另一方面：

$$N_\pm \leq kF + 1.$$

而：

$$F > k + 2$$

推出：

$$kF + 1 < (F-1)^2.$$

矛盾。

故：

$$M - 1, \qquad M + 1$$

同时为素数。证毕。

因此：

不必恢复中心的全部因子历史； 只要一条共同主链足够厚，已经越过平方根门槛， 就能认证整个 Twin 关系。

(69.7)

第七十章　移动视界与关系证书是同一原则的两个尺度

平方视界回答：

> 一批候选怎样被完整有限认证？

Lucas 关系证书回答：

> 一个巨大候选怎样被完整有限认证？

二者共享同一原则：

有限信息一旦已经越过所有可能改变目标身份的门槛， 后续信息不再能够改写结论。

(70.1)

所以有限视界与有限证书不是两条彼此无关的技术。

它们是同一种终端思想在不同尺度上的表现。

第十部　有限计算验收

第七十一章　905 个连续平方视界

取：

$$s^2 < 5 \times 10^7.$$

连续奇素数三元组：

$$p < r < s$$

共得到：

$$\boxed{905}$$

个平方视界。

逐窗计算：

$$B_{r,s}, \qquad |U_{r,s}^{\text{full}}|, \qquad T_{r,s}, \qquad D_{r,s}.$$

得到：

$$\boxed{B_{r,s} \geq |U_{r,s}^{\text{full}}|}$$

在全部 905 个视界成立。

等号发生于：

$$\boxed{r = 11,\ 17,\ 29.}$$

其余 902 个视界严格满足：

$$B > |U^{\text{full}}|.$$

累计：

$$\boxed{\sum B = 239\,213,}$$

$$\boxed{\sum T = 238\,962,}$$

$$\boxed{\sum D = 251,}$$

$$\boxed{\sum |U^{\text{full}}| = 2\,546.}$$

最后一个验收视界：

$$p = 7043, \qquad r = 7057, \qquad s = 7069,$$

得到：

$$B = 657, \qquad |U^{\text{full}}| = 3, \qquad T = 657, \qquad D = 0.$$

这些有限数据逐项检验了平方视界公式、死亡资源注入以及实际资源规模。

第七十二章　结构净势的同一批有限数据

对单位差模板：

$$H=\{0,2\},\qquad \mu_H=1.$$

结构容量为：

$$C^{\mathrm{struct}}=\Delta-1.$$

在同一组 905 个窗口中：

$$\boxed{\sum(\Delta-1)=6\,159.}$$

因此累计结构净势为：

$$\boxed{\sum e^{\mathrm{struct}}=239\,213-6\,159=233\,054.} \tag{72.1}$$

在这批有限窗口中，最小结构净势为正，最小窗口余量为：

$$\boxed{1}.$$

这说明统一结构容量在该有限范围内仍然给出逐窗关系证书。

第七十三章　历史资源复用的有限验收

对：

$$u < 2 \times 10^6$$

的全部素数，计算其满足：

$$s \le u < \frac{s^2}{r}$$

的平方视界次数。

得到：

$$\boxed{\max_{u<2\times10^6} \rho(u) = 5.}$$

非零资格次数分布：

资格次数	原子数
1	47,861
2	72,895
3	25,519
4	2,570
5	86

若只统计真正满足：

$$ru + 2\varepsilon_r(u) = v \in \mathbb{P}$$

的实际死亡见证，则同一个 u 的最大成功复用次数为：

$$\boxed{3}.$$

分布为：

实际死亡次数	原子数
1	24,576
2	1,271
3	21

这与资源半衰和有限寿命定理一致。

第七十四章　关系级证书的计算比较

对约 380 位关系实例，在同一 Lucas 快速递推内核下：

方法	验证时间
两端分别验证	3.782 s
共同模数的一般关系证书	8.251 s
关系证书按两个端点分解	4.855 s

所以：

逻辑上的整体化不自动等于运行速度更快。 (74.1)

对约 1040 位结构中心：

$$256200945 \cdot 2^{3426} \pm 1,$$

完整关系证书的一组参数为：

$$P = 81, \qquad Q = 1641, \qquad D = -3.$$

记录：

$$T_{\mathrm{search}} = 7.799 \text{ s},$$

$$T_{\mathrm{verify}} = 1.112 \text{ s}.$$

只保留足厚主链 2^{3426} 后，一组参数为：

$$P = 27, \qquad Q = 183, \qquad D = -3.$$

记录：

$$T_{\mathrm{search}} = 0.423 \text{ s},$$

$$T_{\mathrm{verify}} = 0.0378 \text{ s}.$$

在该实现中，对应约：

$$18.45\times$$

的见证搜索差异和：

$$29.4\times$$

的验证差异。

数学上的核心结论是：

验证所需结构可以从“完整中心因子” 压缩为“一条足厚共同主链”。

(74.2)

图 5-12　905 个平方视界有限验收概览

图中只展示正文明确给出的验收事实与汇总量；它验证结构实现，不作为无限命题的证明来源。

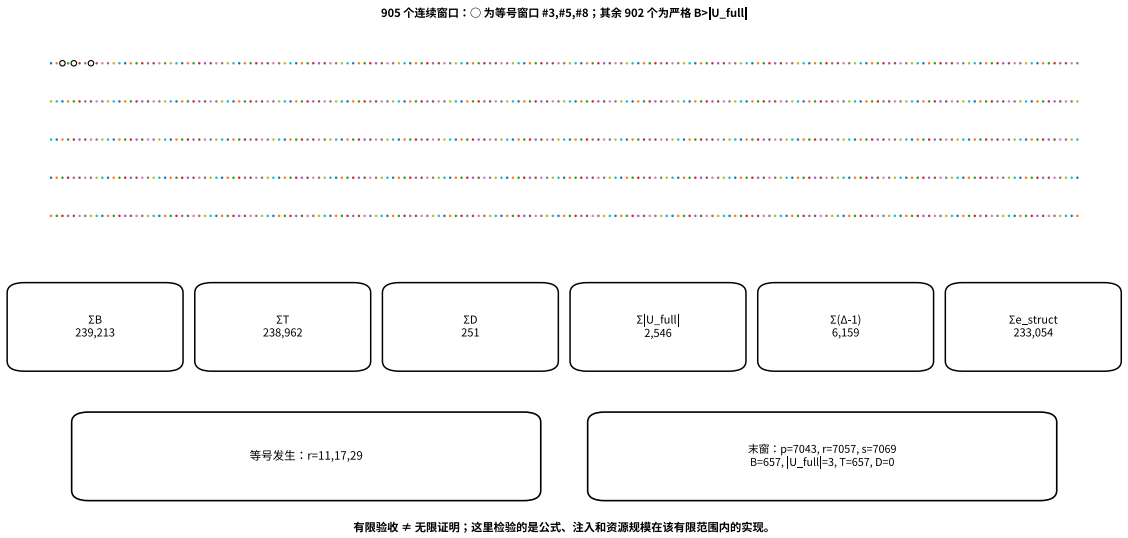


图 5-12　905 个平方视界有限验收概览。 正文对 $s^2 < 5 \times 10^7$ 的 905 个连续平方视界逐窗验收 $B_{r,s}, |U^{\mathrm{full}}_{r,s}|, T_{r,s}, D_{r,s}$。全部窗口满足 $B \geq |U^{\mathrm{full}}|$，其中 $r = 11,17,29$ 为等号，其余 902 个严格；累计 $\sum B = 239213, \sum T = 238962, \sum D = 251, \sum |U^{\mathrm{full}}| = 2546$，同批结构容量给出 $\sum e^{\mathrm{struct}} = 233054$。这些数据用于有限结构验收，而不是替代无限命题的量词证明。

第十一部　参数字典

第七十五章　无限关系模块的参数含义

为了使公式、网页与计算实现保持同一口径，本篇固定以下参数。

75.1　H：固定偏移模板

$$H = \{h_1, \dots, h_k\}.$$

它决定一个局部关系实例读取哪些平移位置。

75.2　$p < r < s$：连续奇素数

- p：旧历史最大控制素数；
- r：当前最后控制素数；
- s：下一个控制素数。

75.3　$\Delta = s - r$：当前 prime gap

它同时控制：

- 平方窗口宽度；
- 吸收资源窗口宽度；
- 结构容量上界。

75.4　B_H：关系供给

旧历史层全部幸存的完整模板数。

75.5　T_H：真实关系

全部端点都是真实素数的模板数。

75.6　D_H：真实死亡

$$D_H = B_H - T_H.$$

75.7　$U(r, s)$：吸收资源池

$$U(r, s) = \{u \in \mathbb{P} : s \le u < s^2/r\}.$$

75.8　Q：wheel 控制素数集合

用于计算一个资源可以通过多少模板角色重复吸收。

75.9 M_Q：wheel 模数

$$M_Q = \prod_{q \in Q} q.$$

75.10 $\mu_H(Q)$：吸收复用度

同一个资源在有限 wheel 条件下能够承担的最大模板端点角色数。

75.11 C_H^{exact}：固定谱资源容量

$$C_H^{\mathrm{exact}} = \mu_H(Q)|U|.$$

75.12 C_H^{struct}：结构容量

$$C_H^{\mathrm{struct}} = \mu_H(Q)(\Delta - 1).$$

75.13 e_H：净关系势

$$e_H = B_H - C_H.$$

它表示：

> 当前关系供给减去一个可证明的最大吸收容量。

75.14 $\mathcal{E}_H$：累计净关系势

$$\mathcal{E}_H(N) = \sum_{j \le N} e_{H,j}.$$

它是有限视界证书进入无限回归的核心累计量。

第七十六章　量词模块的参数含义

$$X$$

有限视界或累计上界。

$$\theta$$

关系参数，例如：

- 固定和值；
- 固定差；
- 多项式；
- 窗口索引；
- 块起点。

$$x$$

关系锚点。

$$k$$

关系长度、模板大小或窗口块长。

$$C_R(X)$$

无限回归累计命中数。

$$C(\theta)$$

全称纤维中某个固定参数的 witness 数。

$$W(n)$$

窗口占据数。

$$L(X)$$

有限视界内已实现的最大关系长度。

$$P(X)$$

成功参数累计数。

$$\boldsymbol{F(X)}$$

逐索引全称问题的累计失败数。

第十二部　有限证书进入经典命题的形式证明

第七十七章　证书作为定理接口

一个经典命题经过第三篇的关系规范化以后，具有标准形式：

$$\boxed{Q_{\theta,x}[R_\theta(x)=1].} \tag{77.1}$$

第五篇的证书不改变命题，只提供能够直接进入量词层的有限下界、累计下界或排除式。

例如全称 fiber 的标准计数为：

$$C(\theta)=\sum_{x} R_\theta\,(x).$$

若：

$$\boxed{C(\theta)\geq L(\theta)>0,} \tag{77.2}$$

则：

$$\boxed{\exists x{:}\,R_\theta(x)=1.} \tag{77.3}$$

若它对全部参数成立，则：

$$\boxed{\forall\theta\ \exists x{:}\,R_\theta(x)=1.} \tag{77.4}$$

定理 77.1　全称 fiber 证书传递

若：

$$C(\theta)\geq L(\theta)>0 \quad \forall\theta,$$

则：

$$\boxed{\forall\theta\ \exists x{:}\,R_\theta(x)=1.} \tag{77.5}$$

证明

对任意 θ，$C(\theta)>0$ 意味着至少一个关系实例命中。参数任意，故全称成立。证毕。

77.2　无限回归证书传递

设：

$$C_R(X)=\sum_{x\leq X} R\,(x).$$

若有：

$$\boxed{C_R(X)\geq E(X),} \tag{77.6}$$

并且：

$$\boxed{\limsup_{X\to\infty} E(X)=+\infty,} \tag{77.7}$$

则 $C_R(X)$ 无界。

因此：

定理 77.2　无限回归证书传递

$$\boxed{C_R(X) \geq E(X), \quad \limsup E(X) = +\infty \Rightarrow \exists^{\infty} x : R(x) = 1.} \tag{77.8}$$

这正是累计净关系势定理的抽象形式。

77.3　其他量词的证书入口

窗口全称使用：

$$W(n) \geq 1 \quad \forall n.$$

任意长度使用：

$$L(X) \text{ 无界.}$$

参数无限使用：

$$P(X) \text{ 无界.}$$

逐索引全称使用：

$$F(X) = 0 \quad \forall X.$$

身份块分离使用统一有限块长 K。

所以第三篇的七类量词在第五篇都具有明确的证书入口。

第七十八章　Twin 的形式证明与无限闭合

Twin 的经典命题有无损形式链：

$$\boxed{\begin{aligned}&\exists^{\infty} p\colon\ p, p+2 \in \mathbb{P}\\ \Leftrightarrow\ &\exists^{\infty} a\colon\ \hat{\alpha}(a)\hat{\alpha}(a+1)=1\\ \Leftrightarrow\ &\Gamma^{[1]}=\infty\\ \Leftrightarrow\ &C_T(X)\ \text{无界}\\ \Leftrightarrow\ &\forall K\ \exists j>K\colon\ T_j>0.\end{aligned}} \tag{78.1}$$

单视界供给—吸收定理给出：

$$\boxed{T_j \geq B_j - |U_j| \geq B_j - (\Delta_j - 1).} \tag{78.2}$$

定义：

$$e_j^{\text{exact}} = B_j - |U_j|, \qquad e_j^{\text{struct}} = B_j - (\Delta_j - 1).$$

以及累计量：

$$\boxed{\mathcal{E}_T^{\text{exact}}(N) = \sum_{j \leq N} e_j^{\text{exact}},} \tag{78.3}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_T^{\text{struct}}(N) = \sum_{j \leq N} e_j^{\text{struct}}.} \tag{78.4}$$

于是：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_T^{\text{exact}}(N) = +\infty \Rightarrow \exists^{\infty} p\colon\ p, p+2 \in \mathbb{P},} \tag{78.5}$$

以及：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_T^{\text{struct}}(N) = +\infty \Rightarrow \exists^{\infty} p\colon\ p, p+2 \in \mathbb{P}.} \tag{78.6}$$

因此 Twin 的证书链为：

$$\boxed{\text{单视界终端认证} \to \text{供给—吸收下界} \to \text{累计净势} \to \text{无限回归}.} \tag{78.7}$$

对单位差模板

$$H = \{0,2\}, \qquad \mu_H = 1,$$

本篇前述双逃逸持续供给、单资源吸收上界、资源半衰与有限寿命共同完成累计供给—累计吸收比较，得到累计净势无界。代入定理 77.2（等价地，定理 46.1）即得：

$$\boxed{\exists^{\infty} p\colon\ p, p+2 \in \mathbb{P}.} \tag{78.7a}$$

因此，式 (78.1)—(78.7a) 构成 Twin 从有限移动视界到无限回归的完整证明链。

关系级 Lucas 证书作用于另一个尺度：它对一个指定巨大 Twin 候选直接给出有限终端认证。

所以：

平方视界证书负责批量关系； 关系级 Lucas 证书负责单个巨大关系； 二者进入同一 Twin 形式命题。

(78.8)

图 5-09　Twin 持续非灭绝主图

平方视界逐层提供有限、零误差关系证书；供给—吸收账本形成累计净势，进入无限回归量词。

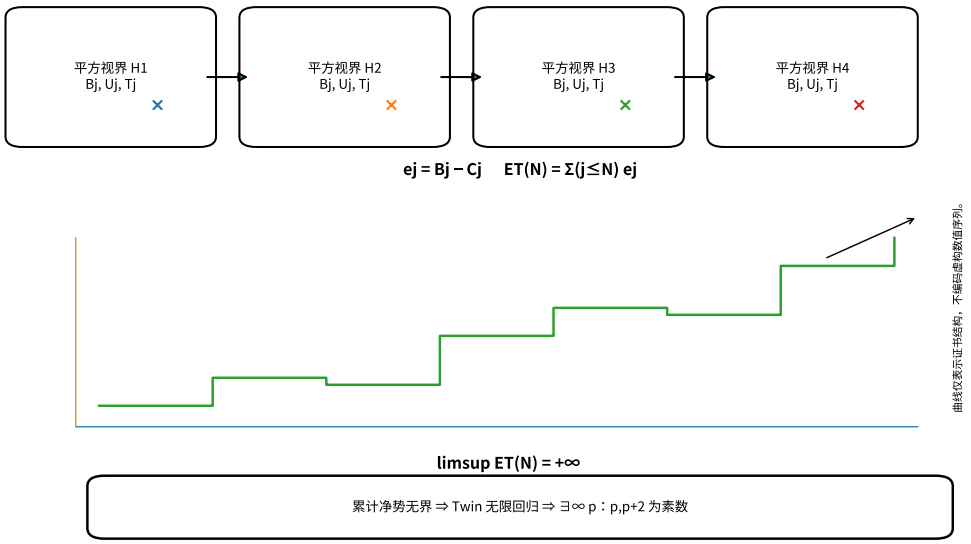


图 5-09　Twin 持续非灭绝主图。 Twin 不依赖共同终端，而是在连续平方视界中进行单视界终端认证、供给—吸收比较与累计净势记账。累计净势进入无界状态后，读取为单位差关系的无限回归。

第七十九章　一般经典命题怎样调用第五篇

79.1　固定 prime tuple

对：

$$H = \{h_1, \dots, h_k\},$$

关系：

$$R_H(n) = \prod_{j=1}^{k} \alpha\,(n + h_j).$$

模板通过局部阻塞检查以后，本篇构造：

$$B_H,\quad U,\quad \mu_H,\quad C_H,\quad e_H,\quad \mathcal{E}_H.$$

若：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_H(N) = +\infty,}$$

则该模板无限回归。

79.2　Goldbach 型全称 fiber

Goldbach 属于：

$$\text{UNIVERSAL_FIBER}.$$

第四篇已经给出固定和值终端冻结与关系完备性等价。

若对每个目标 m 有：

$$\boxed{G(m) \geq L(m) > 0,} \tag{79.1}$$

或者对自然终端段建立统一覆盖证书，则：

$$\boxed{\forall m \geq 3:\ G(m) > 0.} \tag{79.2}$$

79.3　窗口全称

若：

$$\boxed{W(n) \geq 1} \tag{79.3}$$

对全部窗口参数成立，则窗口全称成立。

79.4　任意长度

Green–Tao 型命题使用：

$$\boxed{L(X) \text{ 无界.}} \tag{79.4}$$

79.5 参数无限

Mersenne 型参数计数可写为：

$$\boxed{P(X) = \#\{p \le X : 2^p - 1 \in \mathbb{P}\}.} \tag{79.5}$$

$P(X)$ 无界即得到成功参数无限。

79.6 统一调用链

经典命题的证明接口由此写成：

$$\boxed{\text{经典命题} \Leftrightarrow \text{关系标准形} \Leftarrow \text{有限证书族} \Leftarrow \text{有限控制定理.}} \tag{79.6}$$

其中：

- 第三篇负责关系标准形；
- 第四篇负责有限控制与终端身份；
- 第五篇负责证书及其量词传递；
- 第六篇负责逐个经典命题完成双向形式化和证书调用。

因此：

> **第五篇是经典命题形式证明可以直接调用的全局证书库。**

(79.7)

第十三部　本篇核心定理表

第八十章　无限量词定理

T1　无限回归计数判据

$$\boxed{\exists^{\infty}x: R(x)=1 \Leftrightarrow C_R(X) \text{ 无界.}}$$

T2　全称纤维判据

$$\boxed{\forall\theta\exists x: R_\theta(x)=1 \Leftrightarrow C(\theta)>0 \quad \forall\theta.}$$

T3　窗口全称判据

$$\boxed{\forall n\exists x \in I_n \Leftrightarrow W(n)\geq 1 \quad \forall n.}$$

T4　任意长度判据

$$\boxed{\forall k\exists\Theta, x \Leftrightarrow L(X) \text{ 无界.}}$$

T5　参数无限判据

$$\boxed{\exists^{\infty}\theta\exists x \Leftrightarrow P(X) \text{ 无界.}}$$

第八十一章　持续型关系筛定理

T6　平方视界精确 Twin 公式

$$\boxed{\mathcal{T}_{r,s} = \{n : r^2 \le n < n+2 < s^2,\ \gcd(n(n+2), r^{\#}) = 1\}.}$$

T7　单余因子单死亡

固定 $r, u > 3$，一个余因子在单视界至多吸收一条单位差关系。

T8　清洁区

旧双逃逸关系若完整落在：

$$(r^2, rs),$$

则直接为 Twin。

T9　资源半衰

$$\boxed{\log(u/s) < \frac{1}{2}\log(u/r).}$$

T10　资源有限寿命

$$\boxed{\rho(u) < \infty.}$$

第八十二章　一般模板供给—吸收定理

T11　单层净化

旧历史幸存的内部合数端点必为：

$$\boxed{ru, \qquad u \in U(r,s).}$$

T12　吸收容量

$$\boxed{D_H \le \mu_H(Q)|U|.}$$

T13　结构资源上界

$$\boxed{|U| \le \Delta - 1 \qquad (r \ge 5).}$$

T14　精确净势下界

$$\boxed{T_H \ge e_H^{\mathrm{exact}}.}$$

T15　结构净势下界

$$\boxed{T_H \ge e_H^{\mathrm{struct}}.}$$

T16　累计精确净势无限判据

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_H^{\mathrm{exact}}(N) = +\infty \Rightarrow H \text{ 关系无限回归.}}$$

T17　累计结构净势无限判据

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_H^{\mathrm{struct}}(N) = +\infty \Rightarrow H \text{ 关系无限回归.}}$$

第八十三章　关系级证书定理

T18　一般 Twin 单关系证书

条件：

$$\gcd(K, 2QD) = 1,$$

$$U_M(P, Q) \equiv 0 \pmod{K},$$

以及：

$$\gcd(U_{M/q}, K) = 1$$

对每个不同素因子 $q \mid M$ 成立，则：

$$M - 1,\ M + 1$$

同时为素数。

T19　足厚单主链证书

若：

$$M = k2^e,$$

共同 2-幂主链满足：

$$2^e > k + 2,$$

并满足相应 Lucas V-序列群阶条件，则：

$$M - 1,\ M + 1$$

同时为素数。

T20　全称 fiber 证书传递

若：

$$C(\theta) \geq L(\theta) > 0 \quad \forall \theta,$$

则：

$$\boxed{\forall \theta\ \exists x : R_\theta(x) = 1.}$$

T21　无限回归证书传递

若：

$$C_R(X) \geq E(X), \qquad \limsup_{X\to\infty} E(X) = +\infty,$$

则：

$$\boxed{\exists^{\infty} x: R(x) = 1.}$$

T22　Twin 累计净势证书

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_T^{\mathrm{exact}}(N) = +\infty \Rightarrow \text{Twin 无限回归.}}$$

并且：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_T^{\mathrm{struct}}(N) = +\infty \Rightarrow \text{Twin 无限回归.}}$$

T23　经典命题证书接口

经典命题一旦写成标准关系量词，第五篇相应的有限证书与量词闭合器即可直接进入其形式证明。

图 5-13　第五篇核心定理依赖图

T1–T23 按“量词判据—持续筛—模板供给吸收—关系级证书”四层组织。



图 5-13　第五篇核心定理依赖图。 第五篇 T1–T23 可分成四层：T1 – T5 给出不同全局量词的标准有限判据；T6 – T10 建立持续型关系筛的平方视界、单死亡、清洁区、资源半衰与有限寿命；T11 – T17 建立一般模板的净化、吸收容量、结构上界、净势与累计无限判据；T18 – T23 则把 Lucas 关系证书、主链证书及全称/无限证书传递回正式经典命题。

结语　无限是有限证书的无界累计

无限关系最容易被说成一句模糊的话：

> 这种关系会不会一直出现下去？

本篇把这句话拆开以后，得到一条完全有限的内部链。

先取一个有限平方视界。

在这个视界中，全部端点身份都可以终端认证。

旧历史留下：

$$B_H$$

个完整关系供给。

若一个供给最终死亡，它必须留下：

$$ru$$

这样的真实吸收见证。

资源只能来自有限集合：

$$U(r,s).$$

模板内部结构进一步限制同一个资源能够承担多少角色：

$$\mu_H(Q).$$

因此死亡总量不能超过：

$$\mu_H(Q)|U|.$$

于是当前窗口至少留下：

$$\boxed{B_H-\mu_H(Q)|U|}$$

份净关系势。

再用：

$$|U|\le \Delta-1,$$

得到完全由结构参数控制的：

$$\boxed{B_H-\mu_H(Q)(\Delta-1).}$$

所有这些量都是有限的。

真正的“无限”只在最后一步出现：

$$\boxed{\mathcal{E}_H(N) = \sum_{j \le N} e_{H,j}\,.}$$

如果：

$$\mathcal{E}_H(N)$$

无界，那么真实关系累计数也无界。

于是：

无限不是一次性操作一个无限对象； 无限是有限关系证书不断累积而没有上界。

这句话给无限关系一个完全可计算、可证明、可批量运输的结构。

它也准确说明了资源寿命定理的位置。

一个历史原子 u 的吸收寿命有限：

$$\rho(u) < \infty.$$

这说明旧资源不会永久承担吸收责任。

而新的历史原子还会不断出现。

因此全局比较被落实为同一累计账本：新资源的吸收能力受复用度与有限寿命约束，而新的关系供给持续进入。对 Twin，单位差模板满足 $\mu_H = 1$，前述供给—吸收比较给出累计供给严格超过累计吸收，从而累计净势无界，完成无限回归闭合。

这一全局账本由：

$$B_H,\quad U,\quad \mu_H,\quad C_H,\quad e_H,\quad \mathcal{E}_H$$

组成一条完整的关系账本。

对于 Twin：

$$H = \{0,2\},\qquad \mu_H = 1.$$

对于一般 prime tuple：

$$\mu_H$$

记录模板允许的资源复用度。

对于其他关系轨道，有限认证工具可以改变，但无限量词接口保持不变。

因此本篇最重要的统一不是：

> 所有无限问题都使用同一个筛。

而是：

所有无限问题都必须明确： 有限事实怎样累计成与自身量词完全匹配的无界或全称判据。

这也解释了为什么：

INF_RECURRENCE, UNIVERSAL_FIBER, WINDOW_UNIVERSAL, ARBITRARILY_LONG,

不能混成一个“无限”。

它们共享固定谱、关系语法、有限视界和证书语言；

它们在最后一步使用不同的全局闭合器。

于是前四篇与本篇形成完整链条：

固定身份
⇓
关系还原与导出几何
⇓
关系切片与量词标准形
⇓
CRT 生存树与首次局部淘汰
⇓
真实死亡与关系字母表
⇓
实际关系供给 B_H
⇓
吸收容量与净关系势
⇓
累计证书
⇓
目标命题的全局量词闭合.

由此，有限证书已经与经典命题的形式证明完成衔接；对 Twin，本篇已经完成从有限平方视界到无限回归的全局闭合。

第六篇将逐个完成经典命题与关系标准形的双向等价，并直接调用本篇已经建立的证书定理。

于是：

经典命题 ↔ 关系标准形 ← 有限证书 ← 有限控制.

这里每一层都有自己的对象，每一层都可以单独复核，而整个证明链能够连续传递。

最终得到本篇的总句：

有限决定每一次关系的身份； 累计决定无限关系有没有终点。

以及：

无限关系的标准，不是“看得足够远”， 而是有限证书的累计具有无界结构。

第六篇　经典命题的形式证明、关系切片全集与方法边界

——从经典命题的无损编译到卷积历史、经典方法与能力边界

本篇主旨

前五篇已经建立：

固定身份 → 关系还原 → 有限终端 → 关系切片 → 有限控制 → 无限量词.

到这里，统一素数关系理论已经具备完整的底层语言。

本篇所做的事情不是再增加一套母体，而是把经典素数问题逐一放回已经建立的母体，说明：

同一个固定身份谱， 如何承载固定和、固定差、窗口、仿射、多项式、指数、因子集合、密度与谱等完全不同

同时，本篇系统安放经典筛法与解析方法。

它们并不彼此替代，也不与统一母体竞争。

它们各自读取母体的不同层：

乘法占位 | 浅乘法深度 | 平均模分布 | 固定和频率 | 高阶组合结构 | 全局谱 | 有限证书.

因而：

统一的是对象、关系语言与证明接口； 方法可以因关系而异。

本篇进一步把“关系切片”提升为严格的形式证明。每个经典命题依次经过：

原命题 → 变量归一 → 位置映射 → 固定身份谓词 → 关系切片 → 量词标准形 → 双向等价证明 → 有限证书 / 结构判

因此：

经典问题不是被“类比”为统一语言； 它们被逐项证明与统一语言严格等价。

摘要

本篇把统一素数关系母体的承载能力系统展开。

定义一般关系母体：

$$\mathfrak{M} = (\boldsymbol{I}, \mathcal{A}, \Gamma, \{\mathcal{V}_t\}, \mathrm{Read}),$$

其中：

- $\boldsymbol{I}$ 为固定算术身份谱；
- $\mathcal{A}$ 为原子层；

- Γ 为持久关系场；
- $\{\mathcal{V}_t\}$ 为有限终端视界；
- Read 为关系读出。

一个具体关系可以写成四元组：

$$\boxed{\mathfrak{P} = (\Gamma_F, B, \mathcal{R}, Q),}$$

其中：

- $\Gamma_F = F(\mathcal{U})$ 是关系轨道；
- $B \subseteq \mathbb{N}^r$ 是允许的乘法深度集合；
- $\mathcal{R}$ 是有限观察区域、切片或尺度；
- Q 是外层量词或整体要求。

对任意有限阶关系空间

$$\mathcal{X}_r = \mathbb{O}_{\geq 3}^r,$$

定义乘法深度张量

$$\boxed{\Delta_r(x_1, \dots, x_r) = (\Omega(x_1), \dots, \Omega(x_r)),}$$

以及原子顶点骨架

$$\boxed{\mathcal{V}_r = \Delta_r^{-1}(1, \dots, 1) = \mathbb{P}_{\text{odd}}^r.}$$

若

$$F = (F_1, \dots, F_r): \mathcal{U} \to \mathcal{X}_r,$$

则：

$$\boxed{\{t: F_1(t), \dots, F_r(t) \text{ 全为奇素数}\} = F^{-1}(\mathcal{V}_r).}$$

这说明：

$$\boxed{\text{统一承载不是名称上的归类，而是严格的预像结构。}}$$

本篇把经典命题的形式证明统一为九个步骤：

1. 经典原命题
2. 变量归一
3. 位置映射
4. 固定身份谓词
5. 关系切片
6. 量词标准形
7. 双向等价证明
8. 有限证书 / 结构判据
9. 回译经典命题.

双向关系使用

$$\Leftrightarrow$$

书写；有限证书若给出充分条件，则严格使用

$$\Rightarrow$$

进入目标命题。于是“形式等价”和“证书传递”在全书中具有统一而清楚的逻辑强度。

本篇据此整理六大关系几何：

1. 固定关系切片；
2. 高阶仿射关系；
3. 非线性关系轨道；
4. 稀疏指数关系轨道；
5. 区间与度量关系；
6. 统计与谱关系。

并把经典问题逐项编译到统一语言：

- Goldbach；
- Lemoine / Lévy；
- 弱 Goldbach；
- Chen；
- Twin；
- Polignac；
- Sophie Germain / safe prime；
- Hardy–Littlewood prime k-tuple；
- Green – Tao；
- Dirichlet；
- PNT 与 PNT in AP；
- Bertrand；
- Legendre；

- Oppermann；
- Brocard；
- Andrica；
- Firoozbakht；
- n^2+1；
- Bunyakovsky；
- Schinzel H；
- Mersenne；
- Fermat；
- Waring – Goldbach；
- Grimm；
- Erdős – Woods；
- RH / GRH 的全局谱接口。

这些问题共享固定身份谱，却分别使用不同的位置映射、局部谓词和量词。

本篇还系统讨论高阶关系向低阶关系的信息传递。若

$$\pi: \mathcal{X}_r \to \mathcal{X}_s, \qquad s < r,$$

能够把高阶关系实例无损映到低阶关系见证，则高阶结构可以向低阶结构输送真实信息。

典型例子包括：

$$p_j + p_{r-1-j} = p_0 + p_{r-1},$$

即素数等差链向固定和值的镜像折叠；以及第三篇建立的固定和值见证场恒等式：

$$\sum_m \Big| \bigcap_{h\in H} W_K(m+h) \Big| = K\, T_K(H).$$

但高阶结构能够产生低阶见证，并不意味着任意高阶平均结论都能推出低阶全称命题。

本篇由此固定一条方法纪律：

高阶结构可以增加冗余； 低阶命题仍必须恢复低阶见证。

经典方法按照它们保存的信息层次被重新安放：

- 埃拉托斯特尼筛：乘法占位；
- Brun 筛：多端 rough relation；
- Selberg 筛：局部排除权重优化；
- 组合筛与线性筛：浅乘法深度；
- 大筛：多模平均控制；
- Bombieri – Vinogradov：平均模分布；
- Hardy–Littlewood 圆法：固定和频率；

- Chen 方法：固定关系下放宽目标深度；
- GPY / Maynard–Tao：固定差压入有限带；
- Green–Tao：高阶仿射结构；
- L-函数方法：全局谱；
- Pocklington、Lucas、APR、ECPP：有限终端证书。

对解析层，本篇保留 Primorial coarse–fine 分解：

$$P = M_W + E_W,$$

Fourier 支撑分离：

$$\mathrm{supp}\widehat{M}_W \cap \mathrm{supp}\widehat{E}_W = \varnothing,$$

以及：

$$M_W * E_W = 0,$$

从而：

$$P^{*r} = M_W^{*r} + E_W^{*r}.$$

定义 Primorial 壳层

$$\Delta_j P = (\Pi_j - \Pi_{j-1})P,$$

横向创新能量 $\mathcal{T}_j$，并得到：

$$\boxed{\mathcal{H}_J - \mathcal{H}_k = \sum_{j=k+1}^{J} \frac{\mathcal{T}_j}{A_j}.}$$

有限局部因子传输写成：

$$R_{r,j}(N) = \sigma_{r,p_j}(N) R_{r,j-1}(N) + \varepsilon_{r,j}(N),$$

迭代得到有限 Duhamel 公式：

$$\boxed{\begin{aligned} R_{r,J}(N) = R_{r,k}(N) \prod_{\ell=k+1}^{J} \sigma_{r,p_\ell}(N) \\ + \sum_{m=k+1}^{J} \varepsilon_{r,m}(N) \prod_{\ell=m+1}^{J} \sigma_{r,p_\ell}(N). \end{aligned}}$$

这些解析结构精确说明：

$$\boxed{\text{局部周期骨架} + \text{全局横向余量}.}$$

本篇同时保留乘法深度 parity：

$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)},$$

并说明正筛只保存“是否存活”，不保存“以奇深度还是偶深度存活”。

在深筛后只剩深度 1,2 时：

$$\boxed{\begin{pmatrix} P_z \\ Q_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_z \\ L_z \end{pmatrix}.}$$

固定和值的 parity-resolved 分解为：

$$\boxed{4\mathrm{G}_z(N) = (R_z * R_z)(N) - 2(R_z * L_z)(N) + (L_z * L_z)(N).}$$

这些公式明确展示传统方法最容易在哪些信息层上获得力量，也明确展示低阶关系为什么不能被平均量、正能量或单尺度均匀性直接替代。

最后，本篇定义生成复杂度：

$$\boxed{\mathrm{C}_{\mathrm{gen}} = (\mathrm{C}_{\mathrm{layer}}, \mathrm{C}_{\mathrm{horizon}}, \mathrm{C}_{\mathrm{relation}}, \mathrm{C}_{\mathrm{certificate}}).}$$

这使不同问题可以按：

- 原子层成本；
- 视界成本；
- 关系成本；
- 证书成本；

进行结构比较。

本篇由此完成从统一关系母体到经典问题全集、经典方法全集和方法能力边界的连接。

关键词： 经典关系切片；统一母体；关系轨道；乘法深度；Goldbach；Twin；Green–Tao；筛法；圆法；parity；coarse–fine；高阶关系；低阶见证；生成复杂度

第一部　统一母体的承载形式

第一章　关系母体先于具名问题

一个具体素数问题通常带有一个历史名称。

但名称不是底层数学对象。

真正决定一个问题结构的是：

它读取哪些位置 + 要求什么身份 + 在哪个区域读取 + 施加什么量词.

因此：

关系母体先存在，具体问题后出现。 (1.1)

这里的“先”是结构顺序，而不是时间顺序。

一个具体问题不重新创造素数，也不重新创造整数之间所有基本关系。

它从母体中指定：

- 哪些关系对象；
- 哪一种乘法身份；
- 哪一个有限或移动区域；
- 哪一种整体要求。

第二章　统一母体的五个层级

定义：

$$\boxed{\mathfrak{M} = (\boldsymbol{I}, \mathcal{A}, \Gamma, \{\mathcal{V}_t\}, \mathsf{Read}).} \tag{2.1}$$

2.1　固定身份层

$$\boldsymbol{I}(n)$$

保存：

$$\mathfrak{I}(n), \quad \alpha(n), \quad P^{-}(n), \quad \Omega(n), \quad \mathrm{PF}(n), \ldots$$

回答：

这个整数是什么？

2.2　原子层

$$\mathcal{A}$$

记录奇数乘法结构中的不可约原子。

回答：

哪些位置具有乘法不可约身份？

2.3　关系层

$$\Gamma$$

保存原子出生以后形成并永久继承的关系。

回答：

这些对象怎样在一起？

2.4　视界层

$$\{\mathcal{V}_t\}$$

保存有限关系何时得到终端认证。

回答：

什么时候一个有限关系已经不会再被未来历史改写？

2.5 读出层

Read

规定：

- 和；
- 差；
- 窗口；
- 多端模板；
- 多项式；
- 指数轨道；
- 因子身份块；
- 计数；
- 密度；
- 相关；
- 谱。

因此：

新的关系问题通常不需要新的原子母体， 只需要新的关系读出和相应的有限或全局判定。

(2.2)

第三章　任意有限阶关系空间

定义：

$$\boxed{\mathcal{X}_r = \mathbb{O}^r_{\geq 3}.} \tag{3.1}$$

这里：

$$r = 1,2,3,\ldots$$

表示关系阶数。

若奇素数依次为：

$$p_1 < p_2 < \cdots,$$

定义一维 prime-gap cell：

$$\boxed{I_n = \{p_n, p_n + 2, \ldots, p_{n+1}\}.} \tag{3.2}$$

对多重指标：

$$\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_r),$$

定义：

$$\boxed{\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}} = I_{i_1} \times \cdots \times I_{i_r}.} \tag{3.3}$$

于是：

$$\boxed{\mathcal{X}_r = \bigcup_{\boldsymbol{i}} \mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}.} \tag{3.4}$$

二维和—差关系平面只是 $r = 2$ 的最小非平凡实例。

第四章　乘法深度张量与原子顶点骨架

定义：

$$\boxed{\Delta_r(x_1,\dots,x_r)=(\Omega(x_1),\dots,\Omega(x_r)).} \tag{4.1}$$

定义：

$$\boxed{\mathcal{V}_r=\Delta_r^{-1}(1,\dots,1).} \tag{4.2}$$

则：

$$\boxed{\mathcal{V}_r=\mathbb{P}_{\text{odd}}^{r}.} \tag{4.3}$$

所以：

任意有限阶同时素数关系， 都是同一个乘法深度场中的原子顶点关系。

(4.4)

若允许 shallow almost-prime，只需把目标集合从：

$$\{(1,\dots,1)\}$$

扩展到：

$$B\subseteq\mathbb{N}^r.$$

原来的关系轨道无需改变。

第五章　顶点、边、面与浅乘法深度

在 cell

$$C_i$$

中：

几何位置	乘法深度
原子顶点	$(1,\dots,1)$
边内部	至少一个分量 >1
二维面内部	至少两个分量 >1
⋮	⋮

因此：

prime　与　almost-prime

不是两套几何。

它们只是同一个乘法深度空间中的不同层。

第六章　关系轨道

设参数空间为：

$$\mathcal{U}.$$

给定：

$$\boxed{F = (F_1, \dots, F_r) : \mathcal{U} \to \mathcal{X}_r.} \tag{6.1}$$

定义：

$$\boxed{\Gamma_F = F(\mathcal{U}).} \tag{6.2}$$

称为关系轨道。

关系轨道可以是：

- 固定和切片；
- 固定差切片；
- 高阶仿射直线；
- 多参数仿射平面；
- 多项式曲线；
- 指数稀疏轨道；
- 区间族；
- 索引关系；
- 因子身份块；
- 统计或谱读出。

真正统一的是：

$$\boxed{\text{所有关系轨道都进入同一个固定身份谱与乘法深度场。}} \tag{6.3}$$

第七章　原子顶点预像定理

定理 7.1

对：

$$F = (F_1, \dots, F_r),$$

有：

$$\boxed{\{t \in \mathcal{U}: F_1(t), \dots, F_r(t) \text{ 全为奇素数}\} = F^{-1}(\mathcal{V}_r).} \tag{7.1}$$

证明

由：

$$\mathcal{V}_r = \Delta_r^{-1}(1, \dots, 1)$$

可知：

$$F(t) \in \mathcal{V}_r$$

当且仅当：

$$\Omega(F_j(t)) = 1$$

对全部 j 成立。

这正是所有 $F_j(t)$ 均为奇素数。证毕。

更一般地：

$$\boxed{\{t: \Delta_r(F(t)) \in B\} = F^{-1}(\Delta_r^{-1}(B)).} \tag{7.2}$$

所以：

$$\boxed{\text{统一承载不是语言类比，而是严格的预像结构。}} \tag{7.3}$$

第八章　一个关系的统一四元表示

定义：

$$\boxed{\mathfrak{P} = (\Gamma_F, B, \mathcal{R}, Q).} \tag{8.1}$$

8.1　关系轨道 $\boldsymbol{\Gamma_F}$

回答：

$$\boxed{\text{哪些对象正在形成关系？}}$$

8.2　目标深度 $\boldsymbol{B}$

回答：

$$\boxed{\text{哪些乘法身份被允许？}}$$

8.3　观察区域 $\boldsymbol{\mathcal{R}}$

回答：

$$\boxed{\text{在什么有限区域、切片、尺度或窗口中读取？}}$$

8.4　整体要求 $\boldsymbol{Q}$

回答：

$$\boxed{\text{这些关系以什么量词成立？}}$$

例如：

$$\exists, \quad \forall, \quad \exists^{\infty}, \quad \forall k \exists \cdots,$$

以及计数增长、密度或谱性质。

因此：

$$\boxed{\text{许多表面不同的问题，　只是在 } (\Gamma_F, B, \mathcal{R}, Q) \text{ 中改变了一项或几项。}} \tag{8.2}$$

图 6-03　经典命题统一四元表示

一个经典关系命题由关系轨道、目标乘法深度、观察区域与整体量词四项组成。

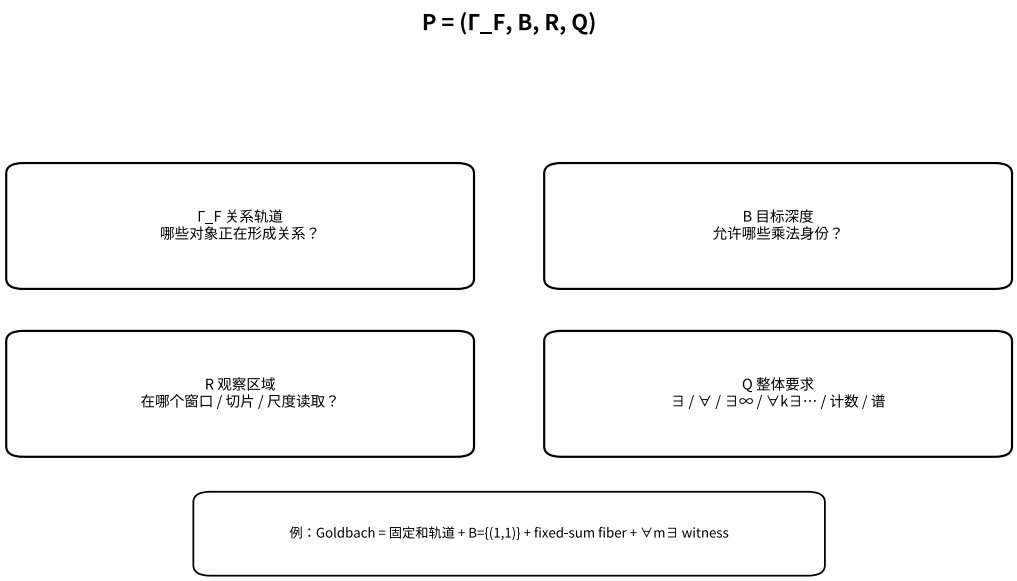


图 6-03　经典命题统一四元表示。 任一关系命题统一写成 $\mathfrak{P} = (\Gamma_F, B, \mathcal{R}, Q)$：$\Gamma_F$ 指定关系轨道，B 指定允许的乘法深度集合，$\mathcal{R}$ 指定有限区域、切片、尺度或窗口，Q 指定存在、全称、无限回归、任意长度、计数增长、密度或谱等整体要求。表面不同的问题往往只改变其中一项或几项。

第九章　有限关系终端认证

设：

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$$

为有限参数集。

假设：

$$3 \le F_j(t) \le H$$

对所有：

$$t \in \mathcal{U}_0$$

和全部 j 成立。

令：

$$p^\star = \max\{p \in \mathbb{P} : p \le \sqrt{H}\}.$$

定理 9.1　有限关系终端认证定理

有限区域 $\mathcal{U}_0$ 中全部端点的 prime/composite 身份，完全由：

$$q \le p^\star$$

的有限原子历史决定。

因此：

$$\boxed{\mathsf{Read}_{F,B}(\mathcal{U}_0)}$$

具有有限、完整、零误差的终端认证。

证明

若：

$$F_j(t) \le H$$

为合数，则它存在不超过自身平方根的素因子：

$$q \le \sqrt{F_j(t)} \le \sqrt{H}.$$

所以该复合身份必在有限历史中被识别。

反过来，若一个大于 1 的整数不存在不超过其平方根的素因子，则为素数。

由于端点总数有限，全部关系身份一并终端确定。证毕。

第十章　有限世界怎样组成全局关系

取递增有限区域：

$$\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \cdots,$$

满足：

$$\bigcup_t \mathcal{U}_t = \mathcal{U}.$$

每一个 $\mathcal{U}_t$ 都是一个完整有限关系世界。

整体问题可能要求：

$$N_t > 0 \quad \forall t,$$

或：

$$N_t > 0 \quad \text{对无穷多个 } t,$$

或：

$$N_t \to \infty,$$

或：

$$N_t \sim M(t).$$

因此：

有限认证决定“这一层是什么”； 量词结构决定“所有有限层合起来是什么”。

(10.1)

图 6-01　统一母体五层承载图

经典命题从同一五层母体中读取：固定身份、原子、关系、视界与读出。

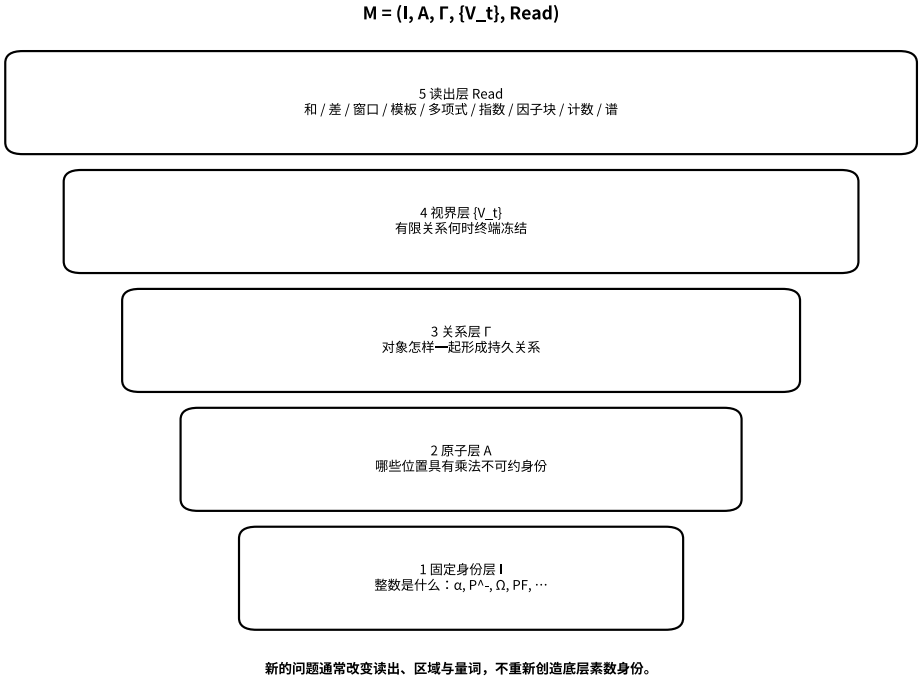


图 6-01　统一母体五层承载图。 统一母体 $\mathfrak{M} = (\boldsymbol{I}, \mathcal{A}, \Gamma, \{\mathcal{V}_t\}, \mathsf{Read})$ 由五层组成：固定身份层回答整数是什么；原子层给出乘法不可约位置；关系层保存对象之间的持久关系；视界层记录有限关系何时终端冻结；读出层再选择和值、差值、窗口、模板、轨道、因子块、计数或谱等观察方式。

第二部　六种关系几何

第十一章　固定关系切片

最简单的关系几何是：

$$\boxed{L(x_1,\dots,x_r)=c.} \tag{11.1}$$

它在高维关系空间中选择一个固定截面。

典型例子：

- 固定和值；
- 固定差；
- 固定线性组合；
- Waring–Goldbach 的固定幂和。

固定和值与固定差是二元固定切片中最基本的两个方向。

第十二章　高阶仿射关系

一般形式：

$$\boxed{F(t) = At + b.} \tag{12.1}$$

当参数为一维时，它是一条仿射线；

参数为多维时，它是一张仿射关系面。

典型例子：

- prime k-tuple；
- Sophie Germain；
- Green–Tao 等差链；
- 同余子格上的素数。

第十三章　非线性关系轨道

一般形式：

$$\boxed{F(n) = (f_1(n), \dots, f_r(n)),} \tag{13.1}$$

其中 f_j 为多项式或其他非线性函数。

典型例子：

- $n^2 + 1$；
- Bunyakovsky；
- Schinzel H；
- Waring–Goldbach 的幂关系。

改变的是轨道几何，而不是素数身份层。

第十四章　稀疏指数关系轨道

典型形式：

$$2^p - 1,$$

$$2^{2^n} + 1.$$

这些轨道在整数轴上极其稀疏。

普通区间密度不是最自然的参数化方式。

但固定谱仍可直接读取这些稀疏位置的身份。

因此：

轨道可以极其稀疏；　　母体仍然不需要改变。	(14.1)

第十五章　区间与度量关系

这一类不固定单条轨道，而指定移动区域：

$$\mathcal{R}_t.$$

读取：

- 是否有素数；
- 有多少素数；
- prime gap；
- 窗口长度；
- 尺度变化。

Bertrand、Legendre、Oppermann、Brocard、Andrica 都属于这一大类。

第十六章　统计与谱关系

这一类读取整个原子场的：

- 计数；
- 密度；
- 相关；
- Fourier 变换；
- Dirichlet 级数；
- L-函数；
- 全局振荡。

PNT、PNT in AP、RH/GRH 属于这一层。

这说明：

母体不仅承载关系存在性，　　也承载计数、密度与谱读出。	(16.1)

图 6-02　六种关系几何地图

第六篇把经典命题按关系几何分成六类；几何不同，适合的工具也可以不同。

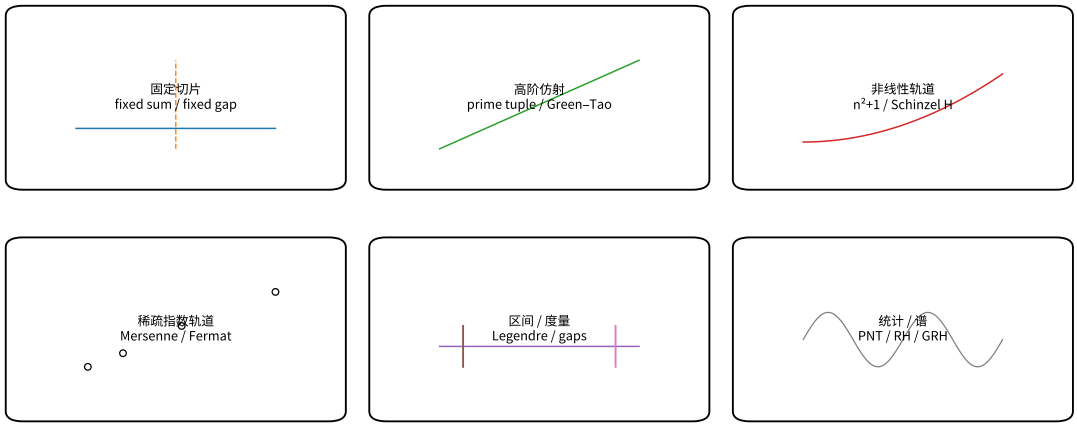


图 6-02　六种关系几何地图。 第六篇把经典素数关系几何分成六类：固定切片、高阶仿射、非线性轨道、稀疏指数轨道、区间/度量关系以及统计/谱关系。Goldbach/Twin、prime tuples/Green–Tao、n^2+1/Schinzel H、Mersenne/Fermat、Legendre/prime gaps、PNT/RH/GRH 分别落入不同几何，因此统一对象层并不意味着统一工具。

第三部　经典命题的形式证明与关系切片全集

本部的形式证明规范

给定经典命题 $\mathcal{P}$，统一关系形式写成

$$\mathcal{Q}_{\Theta,x}[\mathcal{B}_{\Theta}(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)),\dots,\boldsymbol{I}(f_r(x;\Theta)))].$$

形式证明的要求是：

$$\boxed{\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}_{\Theta,x}[\mathcal{B}_{\Theta}(\boldsymbol{I}(f_1),\dots,\boldsymbol{I}(f_r))].}$$

若第五篇已经建立证书 C_{Θ}，则继续写成：

$$\boxed{C_{\Theta} \Rightarrow \mathcal{P},}$$

或在确有双向关系时写成等价。

所以：

> **形式证明保存原命题； 证书负责进入原命题； 两者共享同一关系对象。**

第十七章　Goldbach：固定和值的全称纤维

17.A　Goldbach 的形式等价定理

对偶数 $N \geq 6$，令 $N = 2m$。奇素数端点写成

$$p = 2a + 1, \qquad q = 2b + 1, \qquad a, b \in A.$$

则

$$p + q = N \Leftrightarrow a + b + 1 = m. \tag{17.F1}$$

因此：

定理 17.1　Goldbach 形式等价

对每个 $N = 2m \geq 6$，以下命题等价：

$$\exists p, q \in \mathbb{P}_{\text{odd}} : p + q = N,$$

$$\exists a, b \in A : a \boxplus b = m,$$

$$\Gamma_{\infty}^{(\sigma=m)} \neq \varnothing,$$

以及

$$G(m) > 0.$$

证明。 奇素数与原子坐标通过 $p = 2a + 1$ 双射；式 $(17.F1)$ 给出和值条件的双向等价；$\Gamma_{\infty}^{(\sigma=m)}$ 按定义就是全部满足 $a \boxplus b = m$ 的原子对，而 $G(m)$ 是该 fiber 的基数。证毕。

由于最小偶数基例

$$4 = 2 + 2$$

已经成立，强 Goldbach 的全部非平凡部分从 $N = 6$ 开始。因此强 Goldbach 命题等价于

$$\boxed{\forall m \geq 3, \quad G(m) > 0,} \tag{17.F2}$$

等价于

$$\boxed{\sigma(\Gamma_{\infty}) = \mathbb{Z}_{\geq 3},} \tag{17.F3}$$

也等价于

$$\boxed{A \boxplus A = \mathbb{Z}_{\geq 3}.} \tag{17.F4}$$

第四篇自然终端段进一步给出

$$\boxed{\forall m \geq 3,\ G(m) > 0 \Leftrightarrow \forall k, \quad J_k \subseteq A_k \boxplus A_k.} \tag{17.F5}$$

第四篇已经通过关系完备性、自然终端落位与终端饱和完成这一全称链。因此 (17.F2)—(17.F5) 在本书中是已经闭合的 Goldbach 主定理链；本篇只负责把它无损编译进统一关系标准形，不重复主证明。

第五篇的全称 fiber 证书还可以作为统一证书语言直接进入：

$$G(m) \geq L(m) > 0 \quad \forall m \Rightarrow \text{Goldbach.} \tag{17.F6}$$

给定偶数：

$$N.$$

位置映射：

$$f_1(p;N) = p, \qquad f_2(p;N) = N - p.$$

局部谓词：

$$\boxed{R_N(p) = \alpha(p)\alpha(N-p).} \tag{17.1}$$

量词：

$$\boxed{\forall N \in 2\mathbb{Z}_{\geq 4}, \quad \exists p: R_N(p) = 1.} \tag{17.2}$$

统一类型：

$$\boxed{\text{UNIVERSAL_FIBER.}}$$

在原子坐标中：

$$a + b + 1 = m.$$

固定和值拥有自然终端段，因此它属于：

$$\boxed{\text{终端饱和型关系筛.}}$$

其完整对象已经由第四篇建立。

第十八章　Lemoine / Lévy：加权反射纤维

18.A　Lemoine / Lévy 的形式等价定理

设 $N \geq 7$ 为奇数。经典关系为

$$N = p + 2q, \qquad p, q \in \mathbb{P}.$$

令

$$q = \frac{N-p}{2}.$$

则

$$N = p + 2q \Leftrightarrow q = \frac{N-p}{2}.$$

定理 18.1　加权反射形式等价

$$\exists p, q \in \mathbb{P} : N = p + 2q$$

当且仅当存在 p 使

$$\alpha(p)\alpha\left(\frac{N-p}{2}\right) = 1,$$

并满足 $N - p > 0$、$2 \mid N - p$。

证明。 两个方向都由 $q = (N-p)/2$ 直接得到。证毕。

定义 fiber 计数

$$L(N) = \sum_{p} \alpha\,(p)\alpha\left(\frac{N-p}{2}\right)\mathbf{1}_{\{N-p>0,\ 2\mid N-p\}}.$$

则全称命题严格等价于

$$\boxed{L(N) > 0 \quad \text{对全部奇 } N \geq 7.} \tag{18.F1}$$

给定奇数 N，要求：

$$N = p + 2q.$$

可写成：

$$f_1(p; N) = p,$$

$$f_2(p; N) = \frac{N-p}{2}.$$

局部谓词：

$$\boxed{L_N(p) = \alpha(p)\alpha\left(\frac{N-p}{2}\right),} \tag{18.1}$$

并要求：

$$N - p$$

为正偶数。

它与 Goldbach 共享：

UNIVERSAL_FIBER,

但关系映射由普通反射变成加权反射。

第十九章　弱 Goldbach：关系阶数升为三元

19.A　弱 Goldbach 的三元形式证明

对奇数 $N \geq 7$，定义

$$R_N(p,q) = \alpha(p)\alpha(q)\alpha(N-p-q).$$

定理 19.1　三元固定和形式等价

$$\exists p_1,p_2,p_3 \in \mathbb{P}: p_1+p_2+p_3 = N$$

当且仅当存在 p,q 使

$$R_N(p,q) = 1.$$

证明。 取 $p = p_1, q = p_2$ 得一向；反向令 $p_3 = N-p-q$。证毕。

因此弱 Goldbach 的全称标准形为

$$\boxed{\forall N \in 2\mathbb{Z}+1,\ N \geq 7,\quad \sum_{p,q} R_N(p,q) > 0.} \tag{19.F1}$$

三素数固定和：

$$x+y+z = N.$$

关系空间：

$$\mathcal{X}_3.$$

目标深度：

$$\boxed{\Delta_3(x,y,z) = (1,1,1).} \tag{19.1}$$

它说明：

> **素数加法问题的关系阶数， 直接对应乘法深度张量的维数。**

(19.2)

三元固定和拥有额外卷积冗余，这是它与二元固定和的重要结构差异。

第二十章　Chen：关系几何不变，目标深度放宽

20.A　Chen 型命题的形式证明

定义浅乘法深度指示

$$\chi_{\leq 2}(n) = \mathbf{1}_{\{n>1,\ \Omega(n)\leq 2\}}.$$

对偶数 N，定义

$$C_N(p) = \alpha(p)\chi_{\leq 2}(N-p).$$

定理 20.1　Chen 关系形式等价

“N 可以写成一个素数与一个乘法深度不超过 2 的整数之和”当且仅当

$$\exists p: C_N(p) = 1.$$

证明。 第二端点条件正是 $\Omega(N-p) \leq 2$，故两种写法完全等价。证毕。

所以 Chen 与 Goldbach 共享

$$x + y = N$$

这一关系几何，只把目标深度从

$$(1,1)$$

扩为

$$(1, \leq 2).$$

二元固定和仍然是：

$$x + y = N.$$

Goldbach 要求：

$$\Delta_2 = (1,1).$$

Chen 型关系允许：

$$\boxed{\Delta_2 \in \{(1,1),(1,2)\}} \tag{20.1}$$

或对称版本。

因此：

$$\boxed{\text{Chen 改变的不是关系，而是允许的乘法深度。}} \tag{20.2}$$

这给 almost-prime 在统一母体中的位置一个非常清楚的解释。

第二十一章　Twin：单位固定差的无限回归

21.A　Twin 的形式等价与证书链

写

$$p = 2a + 1.$$

则

$$p + 2 = 2(a + 1) + 1,$$

所以

$$p, p + 2 \in \mathbb{P} \Leftrightarrow a, a + 1 \in A.$$

定理 21.1　Twin 形式等价

以下命题等价：

$$\exists^{\infty} p : p, p + 2 \in \mathbb{P},$$

$$\exists^{\infty} a : \hat{\alpha}(a)\hat{\alpha}(a + 1) = 1,$$

$$\#\Gamma^{[1]} = \infty,$$

$$C_T(X) = \sum_{a \le X} \hat{\alpha}\,(a)\hat{\alpha}(a + 1) \quad \text{无界},$$

以及

$$\forall K\ \exists j > K : T_j > 0.$$

证明。 前三式由原子坐标与单位差切片定义得到；离散关系集合无限当且仅当累计计数无界；平方视界形成向无穷延伸的互不重叠有限分割，因此累计无界当且仅当任意远处仍有视界命中。证毕。

第五篇给出

$$T_j \ge B_j - |U_j| \ge B_j - (\Delta_j - 1).$$

因此

$$\boxed{\limsup_{N \to \infty} \mathcal{E}_T^{\text{exact}}(N) = +\infty \Rightarrow \text{Twin}.} \tag{21.F1}$$

并且

$$\boxed{\limsup_{N \to \infty} \mathcal{E}_T^{\text{struct}}(N) = +\infty \Rightarrow \text{Twin}.} \tag{21.F2}$$

第五篇已经在单位差模板上完成累计供给—累计吸收比较，并由 $\mu_H = 1$、资源半衰与有限寿命得到累计净势无界。因此 (21.F1)—(21.F2) 的闭合条件在 Twin 主证明中已经满足，单位差无限回归由此完成；本篇同样只保留形式等价与证书链，不重复第五篇主证明。

位置映射：

$$f_1(p) = p, \qquad f_2(p) = p + 2.$$

局部谓词：

$$\boxed{T(p) = \alpha(p)\alpha(p+2).} \tag{21.1}$$

量词：

$$\boxed{\exists^{\infty} p : T(p) = 1.} \tag{21.2}$$

统一类型：

$$\boxed{\text{INF_RECURRENCE.}}$$

它属于：

$$\boxed{\text{持续非灭绝型关系筛.}}$$

第五篇已经给出其平方视界供给—吸收接口。

第二十二章　Polignac：整个固定差族

22.A　Polignac 的形式证明

固定 $h \geq 1$。定义

$$R_h(p) = \alpha(p)\alpha(p+2h),$$

以及

$$E_h(p) = \prod_{p<n<p+2h} (1-\alpha(n)).$$

令

$$P_h(p) = R_h(p)E_h(p).$$

定理 22.1　固定连续偶差形式等价

$p, p+2h$ 是相邻素数，当且仅当

$$P_h(p) = 1.$$

证明。 $R_h = 1$ 等价于两端均为素数；$E_h = 1$ 等价于开区间没有素数。两者同时成立恰好表示相邻素数。证毕。

因此固定 $2h$ 的 Polignac 命题等价于

$$\boxed{\exists^{\infty} p: P_h(p) = 1.} \tag{22.F1}$$

完整 Polignac 命题等价于

$$\boxed{\forall h \geq 1, \quad \exists^{\infty} p: P_h(p) = 1.} \tag{22.F2}$$

固定偶差：

$$2h.$$

位置映射：

$$p, \qquad p+2h.$$

局部谓词：

$$\boxed{R_h(p) = \alpha(p)\alpha(p+2h).} \tag{22.1}$$

若要求两端为相邻素数，还需加入：

$$\boxed{E_h(p) = \prod_{p<n<p+2h} (1-\alpha(n)).} \tag{22.2}$$

于是：

$$\boxed{P_h(p) = R_h(p)E_h(p).} \tag{22.3}$$

Twin 对应 $h = 1$。

Cousin prime 对应 $h = 2$。

Sexy prime 对应 $h = 3$。

所以：

Twin 是固定差族中的最小非平凡成员。 (22.4)

第二十三章　Sophie Germain 与 safe prime：斜线关系

23.A　Sophie Germain / safe prime 的形式证明

定义

$$SG(p) = \alpha(p)\alpha(2p+1).$$

定理 23.1　斜线关系形式等价

p 是 Sophie Germain prime，当且仅当

$$SG(p) = 1.$$

而 q 是相应 safe prime，当且仅当存在

$$p = \frac{q-1}{2}$$

使 $SG(p) = 1$。

因此无限性严格等价于

$$\boxed{\sum_{p \le X} SG(p) \quad \text{无界.}} \tag{23.F1}$$

定义：

$$\boxed{F(p) = (p, 2p+1).} \tag{23.1}$$

局部谓词：

$$\boxed{SG(p) = \alpha(p)\alpha(2p+1).} \tag{23.2}$$

safe prime 是同一个关系的反向读取。

因此：

$$\boxed{\text{改变关系方向，并不要求改变素数母体。}} \tag{23.3}$$

第二十四章　Hardy–Littlewood prime k-tuple

24.A　Hardy–Littlewood prime k-tuple 的形式证明

给定

$$H = \{h_1, \dots, h_r\},$$

定义

$$R_H(n) = \prod_{j=1}^{r} \alpha\,(n + h_j).$$

定理 24.1　固定模板形式等价

$$R_H(n) = 1$$

当且仅当

$$n + h_1, \dots, n + h_r$$

全部为素数。

因此模板无限回归等价于

$$\boxed{C_H(X) = \sum_{n \le X} R_H\,(n) \quad \text{无界.}} \tag{24.F1}$$

局部许可写成

$$\boxed{\nu_H(q) < q \quad \text{对每个素数 } q.} \tag{24.F2}$$

第四篇把它展开成 CRT 生存树；第五篇构造 $B_H, U, \mu_H, e_H, \mathcal{E}_H$。于是

$$\boxed{\limsup \mathcal{E}_H(X) = +\infty \Rightarrow C_H(X) \text{ 无界.}} \tag{24.F3}$$

取有限偏移：

$$H = \{h_1, \dots, h_r\}.$$

定义：

$$\boxed{F(n) = (n + h_1, \dots, n + h_r).} \tag{24.1}$$

局部关系：

$$\boxed{R_H(n) = \prod_{j=1}^{r} \alpha\,(n + h_j).} \tag{24.2}$$

这是一条高维仿射轨道。

局部完全覆盖由：

$$\nu_H(q) = q$$

检测。

因此：

$$\boxed{\text{prime constellation} \quad = \quad \text{局部允许仿射轨道对高维原子顶点骨架的回归。}} \tag{24.3}$$

第二十五章　Green–Tao：任意长等差关系

25.A　Green–Tao 的形式证明

定义

$$C_k(a,d)=\prod_{j=0}^{k-1}\alpha\,(a+jd),\qquad d\geq 1.$$

定理 25.1　任意长等差关系形式等价

“素数中存在任意长等差数列”当且仅当

$$\boxed{\forall k\geq 2,\ \exists a,d\geq 1\colon C_k(a,d)=1.} \tag{25.F1}$$

证明。 一个 $0/1$ 乘积等于 1 当且仅当全部因子均为 1。证毕。

因此其量词类型是

ARBITRARILY_LONG.

定义：

$$\boxed{F(a,d)=(a,a+d,\dots,a+(k-1)d).} \tag{25.1}$$

局部谓词：

$$\boxed{C_k(a,d)=\prod_{j=0}^{k-1}\alpha\,(a+jd).} \tag{25.2}$$

量词：

$$\boxed{\forall k\ \exists a,d\colon C_k(a,d)=1.} \tag{25.3}$$

统一类型：

$$\boxed{\text{ARBITRARILY_LONG.}}$$

这是一张二维参数关系流形穿过任意高维原子顶点骨架的问题。

第二十六章　Green–Tao 向固定和值的镜像折叠

26.A　镜像折叠定理

设

$$p_j = p_0 + jd, \qquad 0 \le j \le r-1.$$

则

$$p_j + p_{r-1-j} = 2p_0 + (r-1)d.$$

所以长度 r 的素数等差链向同一个固定和值

$$N = 2p_0 + (r-1)d$$

输出

$$\boxed{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil}$$

个无序素数表示。

这是一条严格的高阶—低阶见证映射，因为每一个低阶见证的具体两个端点都被保留。

设素数等差链：

$$p_j = p_0 + jd, \qquad 0 \le j \le r-1.$$

则：

$$\boxed{p_j + p_{r-1-j} = 2p_0 + (r-1)d.} \tag{26.1}$$

令：

$$N = 2p_0 + (r-1)d.$$

同一条高阶关系向固定和值切片输出：

$$\boxed{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil}$$

个无序素数表示。

因此：

$$\boxed{\text{高阶等差关系可以向低阶固定和值输送真实见证。}} \tag{26.2}$$

这是一种合法的高阶—低阶传递，因为每一份低阶表示都可以恢复出具体端点。

第二十七章　Dirichlet：同余子格上的无限占据

27.A　Dirichlet 定理的关系形式

固定

$$(a,q)=1.$$

定义

$$R_{a,q}(n)=\alpha(a+qn),$$

$$C_{a,q}(X)=\sum_{0\le n\le X}R_{a,q}\,(n).$$

定理 27.1　同余子格无限占据形式等价

算术级数

$$a,\ a+q,\ a+2q,\ldots$$

含无穷多个素数，当且仅当

$$\boxed{C_{a,q}(X)\text{ 无界.}} \tag{27.F1}$$

因此 Dirichlet 定理在关系语言中写成

$$\boxed{(a,q)=1\Rightarrow C_{a,q}(X)\text{ 无界.}} \tag{27.F2}$$

固定：

$$a \bmod q,\qquad (a,q)=1.$$

定义：

$$\boxed{F(n)=a+qn.} \tag{27.1}$$

Dirichlet 定理说明：

$$\boxed{\text{每一个局部允许的一维同余子格，　都被深度 1 原子层无限次占据。}} \tag{27.2}$$

它是“局部许可 → 无限占据”的经典线性参照。

第二十八章　PNT 与 PNT in AP：coarse density

28.A　PNT 与 PNT in AP 的统计形式

因为

$$\pi(x)=\sum_{n\le x}\alpha(n),$$

prime number theorem 的固定谱形式就是

$$\boxed{\sum_{n\le x}\alpha(n)\sim\frac{x}{\log x}.} \tag{28.F1}$$

固定 $(a,q)=1$，定义

$$\pi(x;q,a)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv a\ (q)}}\alpha(n).$$

则 PNT in AP 写成

$$\boxed{\pi(x;q,a)\sim\frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)}.} \tag{28.F2}$$

这类命题读取的是固定谱的渐近密度，而不是单个 fiber 的非空性。

PNT 读取：

$$\boxed{\pi(x)=\#\{p\le x:p\in\mathbb{P}\}.} \tag{28.1}$$

其主尺度：

$$\boxed{\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}.} \tag{28.2}$$

PNT in AP 则在固定同余子格中读取密度。

这类问题不只问：

有没有？

而问：

$$\boxed{\text{原子以怎样的平均密度出现？}} \tag{28.3}$$

所以它属于统计读出，而不是有限关系终端读出。

第二十九章　Bertrand：移动区间占据

29.A　Bertrand 定理的窗口形式证明

定义

$$W_B(x) = \sum_{x<n<2x} \alpha(n).$$

定理 29.1　Bertrand 形式等价

$$\forall x > 1,\ \exists p \in \mathbb{P}: x < p < 2x$$

当且仅当

$$\boxed{\forall x > 1, \quad W_B(x) \geq 1.} \tag{29.F1}$$

因为 $W_B(x)$ 正好计数窗口中的素数。证毕。

给定 $x > 1$，窗口：

$$(x, 2x).$$

关系谓词：

$$\boxed{W_B(x) = \sum_{x<n<2x} \alpha(n).} \tag{29.1}$$

Bertrand 定理给出：

$$\boxed{W_B(x) \geq 1.} \tag{29.2}$$

它是：

$$\boxed{\text{WINDOW_UNIVERSAL}}$$

的经典区间实例。

第三十章　Legendre：整数平方窗口

30.A　Legendre 命题的窗口形式证明

定义

$$W_L(n) = \sum_{n^2<m<(n+1)^2} \alpha\,(m).$$

定理 30.1　Legendre 形式等价

$$\forall n \geq 1,\ \exists p \in \mathbb{P}: n^2 < p < (n+1)^2$$

当且仅当

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad W_L(n) \geq 1.} \tag{30.F1}$$

因此任何统一正下界证书

$$W_L(n) \geq L(n) > 0$$

都可以直接进入该命题。

定义：

$$\boxed{I_n = (n^2, (n+1)^2).} \tag{30.1}$$

窗口占据量：

$$\boxed{W_L(n) = \sum_{n^2<m<(n+1)^2} \alpha\,(m).} \tag{30.2}$$

目标形式：

$$W_L(n) \geq 1 \quad \forall n.$$

它与第五篇的 prime-square 视界共享平方尺度，却不是同一读出：

- prime-square 视界是身份认证边界；
- Legendre 窗口是待占据区域。

因此：

$$\boxed{\text{共享平方尺度，不等于共享具体关系。}} \tag{30.3}$$

第三十一章　Oppermann：双窗口全称

31.A　Oppermann 的双窗口形式证明

定义

$$W_-(n) = \sum_{n(n-1)<m<n^2} \alpha(m),$$

$$W_+(n) = \sum_{n^2<m<n(n+1)} \alpha(m).$$

定理 31.1　Oppermann 形式等价

每个 $n > 1$ 的两个窗口各至少含一个素数，当且仅当

$$\boxed{W_-(n) \geq 1 \quad \text{且} \quad W_+(n) \geq 1.} \tag{31.F1}$$

因此全称标准形为

$$\boxed{\forall n > 1, \quad \min\{W_-(n), W_+(n)\} \geq 1.} \tag{31.F2}$$

定义：

$$I_n^- = (n(n-1), n^2),$$

$$I_n^+ = (n^2, n(n+1)).$$

定义：

$$W_-(n) = \sum_{m \in I_n^-} \alpha(m),$$

$$W_+(n) = \sum_{m \in I_n^+} \alpha(m).$$

局部谓词：

$$\boxed{W_-(n) \geq 1 \quad \text{且} \quad W_+(n) \geq 1.} \tag{31.1}$$

因此它是两个共享平方边界的窗口关系。

第三十二章　Brocard：连续素数平方窗口计数

32.A　Brocard 的平方窗口计数形式

设 p_n 为第 n 个素数，$n \geq 2$。定义

$$B(n) = \pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2).$$

定理 32.1　Brocard 形式等价

在

$$p_n^2 \quad 与 \quad p_{n+1}^2$$

之间至少有四个素数，当且仅当

$$\boxed{B(n) \geq 4.} \tag{32.F1}$$

所以其全称标准形为

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad B(n) \geq 4.} \tag{32.F2}$$

设：

$$p_n < p_{n+1}$$

为相邻素数。

定义：

$$\boxed{B(n) = \pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2).} \tag{32.1}$$

Brocard 型谓词为：

$$\boxed{B(n) \geq 4} \tag{32.2}$$

在其标准索引范围内。

这里参数本身来自素数序列。

因此它是：

$$\boxed{\text{素数索引生成窗口} + \text{窗口计数谓词}.}$$

第三十三章　Andrica：prime-gap 度量关系

33.A　Andrica 的等价度量形式

恒等式

$$\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}=\frac{p_{n+1}-p_n}{\sqrt{p_{n+1}}+\sqrt{p_n}}$$

给出：

定理 33.1　Andrica 形式等价

$$\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}<1$$

当且仅当

$$\boxed{p_{n+1}-p_n<\sqrt{p_{n+1}}+\sqrt{p_n}.} \tag{33.F1}$$

因此其全称标准形为

$$\boxed{\forall n\geq 1,\quad A_n<1.} \tag{33.F2}$$

定义：

$$\boxed{A_n=\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}.} \tag{33.1}$$

等价地：

$$A_n=\frac{p_{n+1}-p_n}{\sqrt{p_{n+1}}+\sqrt{p_n}}.$$

所以它直接比较：

$$g_n=p_{n+1}-p_n$$

与局部尺度：

$$\sqrt{p_n}.$$

因此：

$$\boxed{\text{Andrica 是 prime-gap cell complex 的局部度量约束。}} \tag{33.2}$$

第三十四章　Firoozbakht：相邻素数的归一化增长

34.A　Firoozbakht 的等价对数形式

由于对数严格递增，

$$p_{n+1}^{1/(n+1)} < p_n^{1/n}$$

当且仅当

$$\boxed{\frac{\log p_{n+1}}{n+1} < \frac{\log p_n}{n}.} \tag{34.F1}$$

所以经典命题可以完全等价地在归一化对数坐标中读取。

局部谓词：

$$\boxed{p_{n+1}^{1/(n+1)} < p_n^{1/n}.} \tag{34.1}$$

等价对数形式：

$$\boxed{\frac{\log p_{n+1}}{n+1} < \frac{\log p_n}{n}.} \tag{34.2}$$

这是一种相邻素数索引关系。

它读取的不是单点 prime/composite，而是相邻素数序列的归一化增长。

第三十五章　n^2+1：二次轨道

35.A　n^2+1 的形式证明

定义

$$R_2(n)=\alpha(n^2+1).$$

则

$$R_2(n)=1 \Leftrightarrow n^2+1\in\mathbb{P}.$$

因此：

定理 35.1　二次轨道无限性形式等价

“有无穷多个 n 使 n^2+1 为素数”当且仅当

$$\boxed{C_2(X)=\sum_{n\le X}\alpha\,(n^2+1)\text{ 无界.}} \tag{35.F1}$$

定义：

$$\boxed{F(n)=n^2+1.} \tag{35.1}$$

局部谓词：

$$\boxed{R(n)=\alpha(n^2+1).} \tag{35.2}$$

量词若要求无限多次，则属于：

INF_RECURRENCE.

这是 Landau 四题中“曲线读出”的标准实例。

第三十六章　Bunyakovsky：一般多项式轨道

36.A　Bunyakovsky 的形式证明

给定整数多项式 f，定义

$$R_f(n) = \alpha(f(n)).$$

于是 $f(n) > 1$ 时，

$$R_f(n) = 1 \Leftrightarrow f(n) \in \mathbb{P}.$$

定理 36.1　多项式 prime-value 形式等价

“$f(n)$ 取得无穷多个素数值”当且仅当

$$\boxed{C_f(X) = \sum_{\substack{n \le X \\ f(n)>1}} \alpha\left(f(n)\right) \text{ 无界.}} \tag{36.F1}$$

“没有固定素数因子”写成

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{P},\ \exists n: f(n) \not\equiv 0 \pmod{q}.} \tag{36.F2}$$

给定整数值多项式：

$$f(n).$$

定义：

$$\boxed{R_f(n) = \alpha(f(n)).} \tag{36.1}$$

这可以理解为：

$$\boxed{\text{多项式轨道是否反复穿过原子层。}} \tag{36.2}$$

线性多项式对应 Dirichlet 型轨道；

更高次多项式保持同一个固定身份谱，只改变轨道几何。

第三十七章　Schinzel H：多项式束

37.A　Schinzel H 的形式证明

给定

$$\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_r),$$

定义

$$R_{\boldsymbol{f}}(n) = \prod_{j=1}^{r} \alpha\left(f_j(n)\right).$$

定理 37.1　多项式束形式等价

全部 $f_j(n)$ 同时为素数，当且仅当

$$R_{\boldsymbol{f}}(n) = 1.$$

因此“同时取得素数值无穷多次”当且仅当

$$\boxed{C_{\boldsymbol{f}}(X) = \sum_{n \le X} R_{\boldsymbol{f}}\,(n) \text{ 无界.}} \tag{37.F1}$$

局部许可写成

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{P},\ \exists n: \prod_{j=1}^{r} f_j\,(n) \not\equiv 0 \pmod{q}.} \tag{37.F2}$$

给定：

$$f_1, \dots, f_r.$$

定义：

$$\boxed{F(n) = (f_1(n), \dots, f_r(n)).} \tag{37.1}$$

局部谓词：

$$\boxed{R_{\boldsymbol{f}}(n) = \prod_{j=1}^{r} \alpha\left(f_j(n)\right).} \tag{37.2}$$

局部完全覆盖检查为：

> 是否存在素数 q，使每一个输入余类都至少令一个 $f_j(n) \equiv 0 \pmod{q}$。

因此它是：

$$\boxed{\text{多项式高维轨道} + \text{局部许可} + \text{无限回归.}} \tag{37.3}$$

第三十八章　Mersenne：指数稀疏轨道

38.A　Mersenne prime 的形式证明

定义

$$M_p = 2^p - 1, \qquad p \in \mathbb{P},$$

以及

$$R_M(p) = \alpha(M_p).$$

则

$$R_M(p) = 1 \Leftrightarrow M_p \text{ 为 Mersenne prime.}$$

因此：

定理 38.1　Mersenne 参数无限形式等价

“Mersenne primes 有无穷多个”当且仅当

$$\boxed{P_M(X) = \sum_{\substack{p \le X \\ p \in \mathbb{P}}} \alpha\,(2^p - 1) \text{ 无界.}} \tag{38.F1}$$

单点 Lucas–Lehmer 认证属于有限证书；参数无限属于

PARAMETER_INFINITE.

给定素数指数 p，定义：

$$\boxed{M_p = 2^p - 1.} \tag{38.1}$$

局部谓词：

$$\boxed{R_M(p) = \alpha(2^p - 1).} \tag{38.2}$$

若关注无限性，则统计：

$$\boxed{C_M(X) = \sum_{\substack{p \le X \\ p \in \mathbb{P}}} R_M\,(p).} \tag{38.3}$$

它属于指数稀疏轨道。

对有限单点，Lucas‑Lehmer 提供高度适配的关系认证工具。

第三十九章　Fermat：双指数稀疏轨道

39.A　Fermat prime 轨道的形式证明

定义

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \qquad R_F(n) = \alpha(F_n).$$

则

$$R_F(n) = 1 \Leftrightarrow F_n \in \mathbb{P}.$$

因此若命题取 Fermat primes 无限性形式，它严格等价于

$$\boxed{C_F(X) = \sum_{0 \le n \le X} \alpha\,(2^{2^n} + 1) \text{ 无界.}} \tag{39.F1}$$

定义：

$$\boxed{F_n = 2^{2^n} + 1.} \tag{39.1}$$

读取：

$$\boxed{\alpha(F_n).}$$

这一轨道比 Mersenne 更稀疏。

它说明：

> **线性、多项式、指数、双指数轨道， 都可以读取同一个固定身份谱。**

(39.2)

第四十章　Waring–Goldbach：非线性固定和流形

40.A　Waring–Goldbach 型命题的形式证明

固定 k,r，定义

$$\mathcal{W}_{k,r}(N)=\left\{(p_1,\dots,p_r)\in\mathbb{P}^r:\sum_{j=1}^{r}p_j^k=N\right\}.$$

定理 40.1　非线性固定和形式等价

N 具有 r 个素数 k 次幂表示，当且仅当

$$\boxed{\mathcal{W}_{k,r}(N)\neq\varnothing.} \tag{40.F1}$$

所以任一 Waring–Goldbach 型全称命题都可以写成

$$\boxed{\forall N\in\mathcal{D}_{k,r},\ \mathcal{W}_{k,r}(N)\neq\varnothing,} \tag{40.F2}$$

其中 $\mathcal{D}_{k,r}$ 是相应允许目标域。

关系为：

$$\boxed{p_1^k+\cdots+p_r^k=N.} \tag{40.1}$$

母体无需定义“k 次方素数”。

只需保持：

$$\Delta_r(p_1,\dots,p_r)=(1,\dots,1),$$

并改变关系流形：

$$x_1^k+\cdots+x_r^k=N.$$

因此：

$$\boxed{\text{改变的是关系几何，不是原子层。}} \tag{40.2}$$

第四十一章　Grimm：完整因子集合与匹配

41.A　Grimm 的匹配形式证明

设

$$n+1,\dots,n+k$$

全部为合数。构造二分图：

- 左顶点 $L=\{1,\dots,k\}$；
- 右顶点 $R=\bigcup_i \mathrm{PF}(n+i)$；
- 若 $p \mid n+i$，连边 (i,p)。

定理 41.1　Grimm 形式等价

以下两件事等价：

1. 存在互不相同的素数 $p_1,\dots,p_k$ 满足 $p_i \mid n+i$；
2. 上述二分图存在覆盖全部左顶点的匹配。

证明。 互异 p_i 直接给出匹配；反过来，覆盖左顶点的匹配为每个位置选出互异素因子。证毕。

由 Hall 定理，还等价于

$$\boxed{\left|\bigcup_{i\in J}\mathrm{PF}(n+i)\right| \geq |J| \quad \forall J\subseteq\{1,\dots,k\}.} \tag{41.F1}$$

考虑连续合数块：

$$n+1,\dots,n+k.$$

每个位置读取：

$$\mathrm{PF}(n+i).$$

构造二分图：

- 左侧：位置 $1,\dots,k$；
- 右侧：出现过的素因子；
- 若 $p \mid n+i$，连接位置 i 与素因子 p。

局部关系要求存在一个匹配，使每个位置获得互不相同的素因子。

因此：

$$\boxed{\text{Grimm 不是 prime/composite 二值关系，　而是完整因子集合上的组合匹配关系。}} \tag{41.1}$$

其外层是逐块全称谓词。

第四十二章　Erdős–Woods：身份块分离

42.A　Erdős–Woods 的身份块形式证明

定义

$$B_K(x) = (\mathrm{PF}(x), \dots, \mathrm{PF}(x+K-1)).$$

定理 42.1　身份块分离形式等价

“存在统一有限 K，使连续整数块由其逐位置素因子集合唯一决定”当且仅当

$$\boxed{\exists K \geq 1,\ \forall x \neq y,\ B_K(x) \neq B_K(y).} \tag{42.F1}$$

等价地，

$$\boxed{B_K\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})^K \text{ 为单射.}} \tag{42.F2}$$

这正是

BLOCK_SEPARATION.

定义：

$$\boxed{B_K(x) = (\mathrm{PF}(x), \dots, \mathrm{PF}(x+K-1)).} \tag{42.1}$$

比较：

$$B_K(x) \quad 与 \quad B_K(y).$$

全局接口是：

$$\boxed{\text{BLOCK_SEPARATION.}}$$

它问的不是“是否无限出现”，而是：

> 是否存在统一有限块长，足以区分不同起点的完整因子身份。

(42.2)

第四十三章　Landau 四题的四种不同读法

43.A　Landau 四题的统一形式表

四个经典命题分别化为：

$$\boxed{\text{Goldbach: } \forall m \geq 3,\ G(m) > 0,}$$

$$\boxed{\text{Twin: } C_T(X) \text{ 无界},}$$

$$\boxed{\text{Legendre: } \forall n \geq 1,\ W_L(n) \geq 1,}$$

$$\boxed{n^2+1\text{: } C_2(X) = \sum_{n \leq X} \alpha\,(n^2+1) \text{ 无界}.}$$

所以：

和、差、窗口、曲线四种命题， 在同一固定谱上调用四种不同量词闭合器。

(43.F1)

Landau 四个经典问题恰好展示四种完全不同的关系几何：

问题	统一读出
Goldbach	固定和纤维
Twin	固定差无限回归
Legendre	平方窗口全称占据
n^2+1	二次轨道无限回归

所以：

$$\boxed{\text{和、差、窗口、曲线四种读法，　都可以由同一固定谱承载。}} \tag{43.1}$$

这比把四个问题并列在一张历史表中更深。

真正变化的是：

$$\Gamma_F,\quad \mathcal{R},\quad Q.$$

图 6-05　Landau 四题四种读法

同一固定谱分别调用和、差、窗口、曲线四种关系几何与相应量词闭合器。

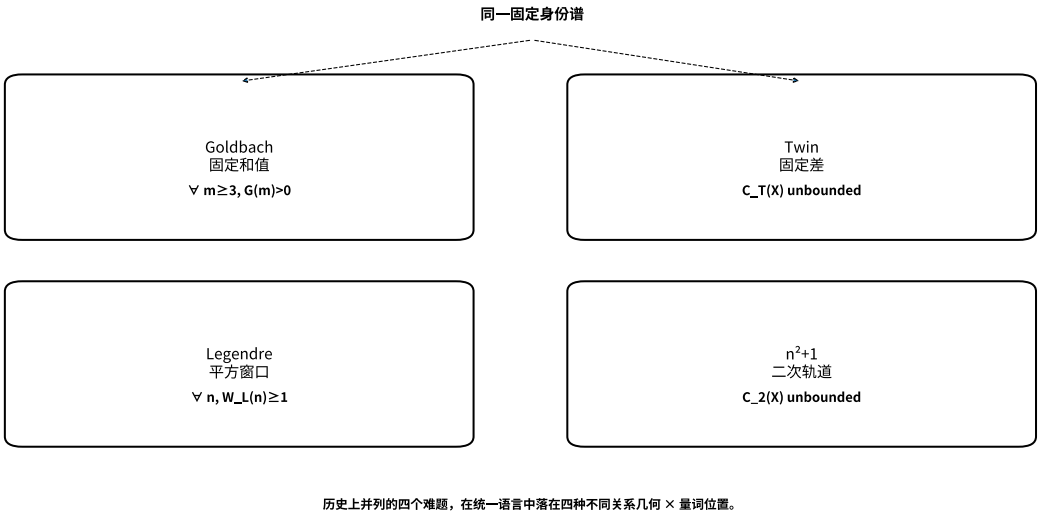


图 6-05　Landau 四题四种读法。 Landau 四题在统一固定谱上调用四种不同关系几何与量词闭合器：Goldbach 是固定和值全称纤维 $\forall m \geq 3,\ G(m) > 0$；Twin 是固定差无限回归 $C_T(X)$ 无界；Legendre 是平方窗口全称占据；$n^2 + 1$ 是二次轨道无限命中。真正变化的是关系轨道、观察区域与外层量词。

第四十四章　RH / GRH：全局谱接口

44.A　RH / GRH 的全局谱形式

由固定算术身份构造 von Mangoldt 数据 $\Lambda(n)$，在 $\Re s > 1$ 有

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

RH 的谱命题写成

$$\boxed{\forall \rho \in Z_{\mathrm{nt}}(\zeta), \quad \Re\rho = \frac{1}{2}.} \tag{44.F1}$$

GRH 对相应 Dirichlet L-函数写成

$$\boxed{\forall \chi,\ \forall \rho \in Z_{\mathrm{nt}}(L(s,\chi)), \quad \Re\rho = \frac{1}{2}.} \tag{44.F2}$$

因此固定谱提供算术系数与 Euler-product 数据，谱命题则属于全局解析变换层。

RH / GRH 读取的不是一个有限关系实例。

它们从素数数据出发，经过：

$$\boxed{\text{计数测度} \to \text{Dirichlet 级数 / } L\text{-函数} \to \text{解析延拓} \to \text{零点谱}.} \tag{44.1}$$

因此：

> **RH / GRH 可以从固定谱取得数据来源， 但它们属于额外的全局解析变换层。**

(44.2)

不能把有限关系筛与全局 L-函数谱混成同一操作。

第四部　卷积历史、终端因子化与派生结构

卷积指数：一个参数编码全部有限关系阶数

对任意函数 f，定义卷积指数

$$\boxed{\mathcal{E}_u(f) = \mathrm{Exp}_*(uf) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^r}{r!} f^{*r}.} \tag{IV.1}$$

其中 $f^{*0} = \delta_0$。

定理 IV.1　卷积指数同态

$$\boxed{\mathcal{E}_u(f+g) = \mathcal{E}_u(f) * \mathcal{E}_u(g).} \tag{IV.2}$$

证明。 对 $(f+g)^{*r}$ 使用卷积二项式并按两个卷积次数重新求和即可。证毕。

定理 IV.2　关系阶数演化式

$$\boxed{\partial_u \mathcal{E}_u(f) = f * \mathcal{E}_u(f).} \tag{IV.3}$$

因此：

> **一个生成参数 u 同时编码一元、二元、三元与全部有限阶关系。**

(IV.4)

有限终端卷积因子化

固定窗口 $[1, X]$。设：

- O_X：窗口内候选 odd positions；
- P_X：真实 prime positions；
- $D_{q,X}$：最小素因子恰为 q 的真实死亡层。

真实死亡唯一性给出

$$\boxed{O_X = P_X \sqcup \bigsqcup_{q \le \sqrt{X}} D_{q,X}.} \tag{IV.5}$$

所以

$$P_X = O_X - \sum_{q \le \sqrt{X}} D_{q,X}.$$

施加卷积指数：

$$\boxed{\mathcal{E}_u(P_X) = \mathcal{E}_u(O_X) * \prod_{q \le \sqrt{X}}^{*} \mathcal{E}_u(-D_{q,X}).} \tag{IV.6}$$

因此：

> **全部有限阶 prime relations，可以由候选关系塔与有限真实死亡生成元统一因子化。**

(IV.7)

由于卷积交换，死亡因子排列顺序不改变终端结果，所以终端关系塔具有路径独立性。

Coarse–Fine fiber 零均值

第七部将定义 coarse 投影 M_W 和 fine residual

$$E_W = f - M_W.$$

若固定 coarse fiber 为 $a + W\mathbb{Z}$，有限周期中有 T 个位置，则

$$M_W(a + Wt) = \frac{1}{T}\sum_{u=0}^{T-1} f\,(a + Wu).$$

因此：

定理 IV.3　fiber 零均值

$$\boxed{\sum_{t=0}^{T-1} E_W\,(a + Wt) = 0.} \tag{IV.8}$$

这说明：

fine residual 不是任意误差；　　它在每一个 coarse fiber 上严格零均值。	(IV.9)

七个派生关系结构

全书的关系层可以收束为七个常用派生对象：

1. 关系容量

例如

$$\rho_H(S), \qquad \mu_H(Q)|U|.$$

2. 关系寿命

例如单资源寿命

$$\rho(u).$$

3. 关系字母表

$$\Sigma_{\mathcal{R}}.$$

4. 关系冻结

有限终端以后，端点身份不再被更高控制层改变。

5. 关系证书

例如

$$B_H > \mu_H(Q)|U| \Rightarrow T_H \geq 1.$$

6. 生成复杂度

$$\mathsf{C}_{\mathrm{gen}} = (\mathsf{C}_{\mathrm{layer}}, \mathsf{C}_{\mathrm{horizon}}, \mathsf{C}_{\mathrm{relation}}, \mathsf{C}_{\mathrm{certificate}}).$$

7. 读出间信息传递

若

$$\pi: \mathcal{X}_r \to \mathcal{X}_s$$

无损保存低阶见证，则形成高阶—低阶关系传递。

所以：

容量、寿命、字母表、冻结、证书、复杂度和读出传递， 共同组成关系母体的七个派生结构。

(IV.10)

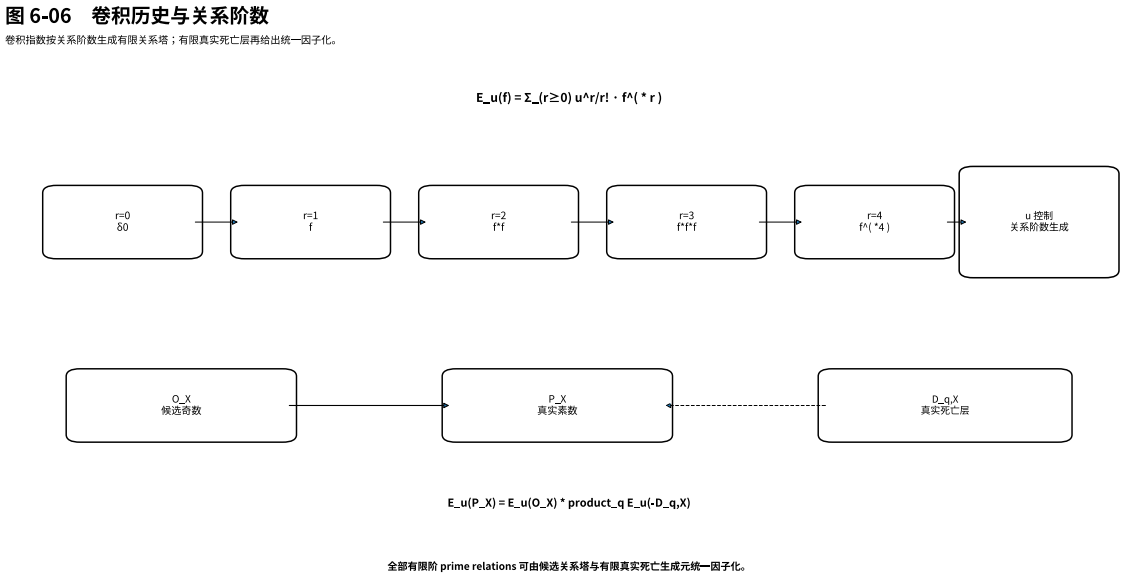


图 6-06 卷积历史与关系阶数。 卷积指数 $\mathcal{E}_u(f) = \sum_{r\geq 0} u^r f^{*r}/r!$ 用一个参数 u 同时编码一元、二元、三元与全部有限阶关系，并满足 $\partial_u \mathcal{E}_u(f) = f * \mathcal{E}_u(f)$。在有限窗口内，真实死亡唯一性进一步给出 $O_X = P_X \sqcup \bigsqcup_{q\leq\sqrt{X}} D_{q,X}$，从而把全部有限阶 prime relations 因子化为候选关系塔与有限真实死亡生成元。

第五部　高阶关系如何向低阶关系传递信息

图 6-04　经典命题的统一关系地图

横向按关系几何分区，纵向按全局量词分区；具名命题只是统一母体上的不同位置与读出。

	固定和值	固定差	仿射/模板	窗口/索引	多项式/指数	因子/谱
全称纤维	Goldbach			Andrica Firoozbakht		
无限回归		Twin	Sophie Germain Hardy–Littlewood k-tuple Dirichlet		n^2+1 Bunyakovsky Mersenne	
窗口全称 / 任意长度			Green–Tao	Bertrand Legendre Oppermann Brocard	Fermat	
参数无限		Polignac			Schinzel H	
身份块 / 全局谱						Grimm Erdos–Woods RH / GRH

同一命题可同时携带更细的几何与量词属性；本图只标主读取位置。

图 6-04　经典命题的统一关系地图。 经典素数命题可按关系几何与全局量词同时定位：固定和值、固定差、仿射模板、窗口/索引、多项式/指数、因子/谱等几何，与全称、无限回归、窗口全称、任意长度、参数型和谱型量词交叉形成统一地图。

第四十五章　关系之间的结构映射

设：

$$\pi: \mathcal{X}_r \to \mathcal{X}_s, \qquad s < r.$$

若：

$$\pi(\Gamma_F)$$

落入另一个关系族，则：

$$\boxed{\Gamma_F \to \pi(\Gamma_F)} \tag{45.1}$$

构成一条关系之间的结构映射。

统一母体的承载力因此不只表现为：

许多问题都可以写进同一框架.

更强的是：

$$\boxed{\text{不同关系读出之间可以传递真实数学信息。}} \tag{45.2}$$

第四十六章　无损高阶—低阶传递

定义 46.1

若每一个高阶关系实例 R 都产生有限个低阶关系见证：

$$\pi_1(R), \dots, \pi_m(R),$$

并且每个 $\pi_j(R)$ 都可以恢复为具体低阶端点，则称该传递为**见证保真的高阶—低阶映射**。

Green–Tao 等差链向固定和值的镜像折叠就是典型例子。

定理 46.2　高阶见证输送

若：

$$R \in \mathcal{V}_r$$

且：

$$\pi_j(R) \in \mathcal{V}_s$$

对 $1 \le j \le m$ 成立，则：

$$\boxed{R \text{ 至少向低阶读出输送 } m \text{ 个真实关系见证.}} \tag{46.1}$$

证明直接来自映射定义。

第四十七章　固定和值见证场向 prime constellations 的反向读取

第三篇定义：

$$W_K(m) = \{a \in A_K : m - 1 - a \in A_K\}.$$

并证明：

$$\boxed{\sum_m \left| \bigcap_{h \in H} W_K(m+h) \right| = K\, T_K(H).} \tag{47.1}$$

所以：

$$\boxed{\text{同一个固定和值见证场，　携带全部有限 prime constellations 的精确有限计数。}} \tag{47.2}$$

这是低阶固定和值场向固定偏移模板的精确信息读取。

图 6-07　高阶 → 低阶信息传递条件

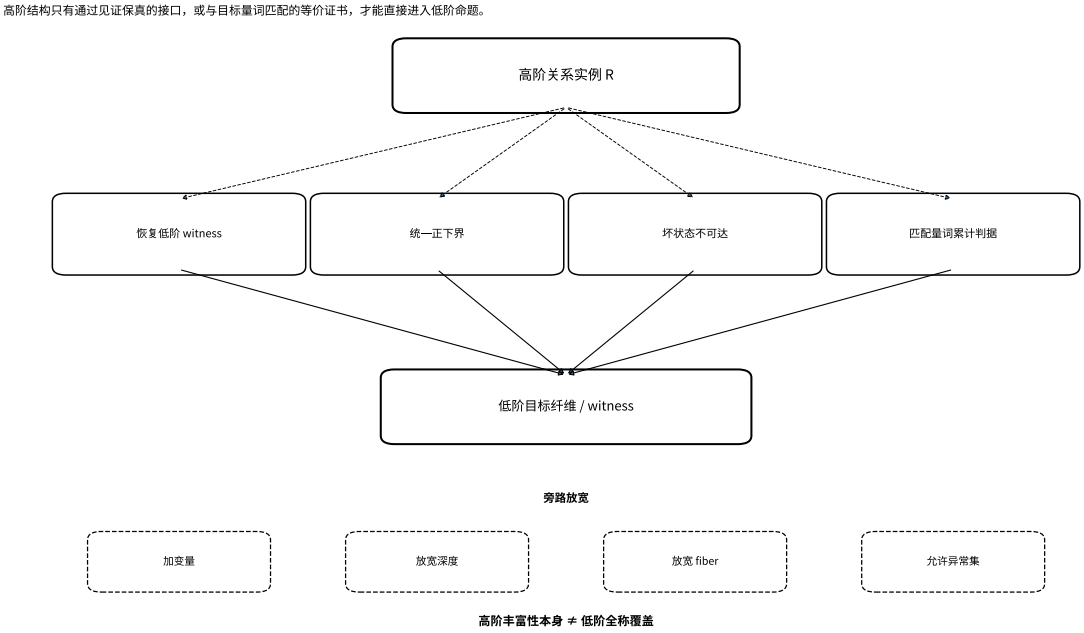


图 6-07　高阶 → 低阶信息传递条件。 高阶关系要直接进入低阶目标，至少需要一个见证保真的接口：恢复具体低阶 witness、给出目标 fiber 的统一正下界、证明低阶坏状态不可达，或提供与目标量词匹配的累计判据。相反，增加变量、放宽乘法深度、放宽关系 fiber 或允许异常集合虽然可增加冗余，却不会自动恢复原低阶命题的全称见证。

第四十八章　高阶存在不等于低阶全称

假设某类高阶关系存在无穷多实例。

即使每个高阶实例都能输送若干低阶见证，也只说明：

某些低阶目标获得很多见证.

它不自动推出：

每一个低阶目标都有见证.

Green–Tao 向固定和值折叠可以推出固定和值重数无界的偶数不断出现，但这与：

$$\forall N$$

是不同量词。

因此：

高阶丰富性不能代替低阶全称覆盖。 (48.1)

第四十九章　低阶关系为什么最少冗余

设关系阶数为：

$$r.$$

当 r 增大时：

- 参数组合增多；
- 卷积次数增多；
- 关系空间变厚；
- 单一局部异常更难控制整个关系。

而：

$$r = 2$$

是最低非平凡关系阶数。

所以：

二元关系并不是“形式简单所以自然容易”； 它恰好处在组合冗余最少的位置。

(49.1)

第五十章　低阶命题拒绝的四种放宽

很多方法获得额外力量，依赖以下一种或多种放宽。

50.1　增加变量

把二元关系提升到三元或更高阶。

50.2　放宽乘法深度

把：

$$P_1$$

放宽为：

$$P_2,\quad P_3,\ldots$$

50.3　放宽关系纤维

例如从精确固定差：

$$h = 1$$

放宽到：

$$h \le H$$

中的某个差值。

50.4　允许异常集合

从：

$$\forall N$$

放宽为：

$$\text{几乎所有 } N.$$

因此：

高阶或平均方法的额外力量，通常来自增加冗余；低阶原命题要求这些冗余最终重新收回。

(50.1)

第五十一章　结构可以升阶，见证不能丢失

这条原则贯穿全书：

$$\boxed{\text{结构可以升阶；}\quad\text{见证不能丢失。}} \tag{51.1}$$

合法的高阶工具必须满足至少一种条件：

1. 可以恢复具体低阶关系见证；
2. 可以证明目标低阶纤维的统一正下界；
3. 可以证明低阶失败状态不可达；
4. 可以给出与目标量词完全匹配的累计判据。

否则，高阶统计量只能作为诊断或中间量。

第六部　经典筛法在统一母体中的位置

第五十二章　埃拉托斯特尼筛：乘法占位

埃拉托斯特尼筛的核心是：

$$p \mid n.$$

在本书语言中，它准确对应：

乘法射线对整数位置的占据. (52.1)

它回答：

哪些位置已经不能成为新原子？

它非常接近固定谱的最底层生成事实。

但单点占位本身还没有保存：

- first-killer；
- 多端关系；
- 关系出生；
- 关系永久继承；
- 关系量词。

因此它是关系理论的底层组成，而不是全部关系结构。

第五十三章　Brun 筛：多端 rough relation

Brun 筛系统地把多个相关线性形式一起放入筛选。

其自然对象是：

$$\boxed{\text{多个端点是否同时避开小素因子.}}$$

因此它最自然产生：

- rough pair / rough tuple；
- 局部因子；
- 候选密度；
- 上界。

在统一语言中，它已经进入关系层，但主要保存：

$$\boxed{\text{局部乘法逃逸.}}$$

完整关系身份还需要终端或额外深度信息。

第五十四章　Selberg 筛：优化局部排除，不增加缺失身份

Selberg 筛通过权重优化局部整除信息的利用。

它说明：

怎样更有效地使用已有局部排除信息.

但如果输入中没有保存：

$$(-1)^{\Omega(n)}$$

或：

$$\Omega(n) = 1$$

的精确深度身份，再好的正权也不能凭空恢复它。

所以：

优化信息的使用方式，不等于增加原来没有的信息。 (54.1)

第五十五章　组合筛与线性筛：浅乘法深度

当筛到足够深时，survivor 的最小素因子已经很大。

因此一个 survivor 的总素因子个数受到限制。

这自然产生：

$$P_1,\quad P_2,\quad P_3,\ldots$$

等浅乘法深度层。

因此：

组合筛与线性筛天然读取“rough survivor + 有限乘法深度”. (55.1)

Chen 型结果正好体现：

固定关系几何 + 目标深度放宽.

第五十六章　大筛：多模平均控制

大筛把许多模条件同时纳入平均控制。

它最擅长：

$$\boxed{\text{多模分布} + \text{平均排除} + \text{整体均方控制}.}$$

但：

$$\boxed{\text{平均控制许多模数} \neq \text{一个指定关系纤维必然非空}.} \tag{56.1}$$

它属于统计层，而不是指定关系的终端身份层。

第五十七章　Bombieri–Vinogradov：平均模分布

Bombieri–Vinogradov 提供非常强的平均算术级数分布。

它为现代筛、bounded gaps 和大量平均型结论提供基础。

其统一位置是：

原子层在许多同余子格上的平均分布控制.

因此：

平均强度很高，　也不能把量词从“平均”自动改成“每一个”. (57.1)

第五十八章　Hardy–Littlewood 圆法：固定和的频率读出

圆法把：

$$x_1 + \cdots + x_r = N$$

转换为 Fourier 积分。

其结构为：

$$\boxed{\text{major arcs} + \text{minor arcs.}}$$

major arcs 捕捉局部算术主结构；

minor arcs 控制全局振荡。

因此圆法在统一母体中的位置是：

$$\boxed{\text{固定和关系的频率显微镜。}} \tag{58.1}$$

它作用于已经明确的固定和关系，而不是重新定义素数。

第五十九章　为什么三元与高阶加法更有平滑

设：

$$P = M + E.$$

若 coarse / fine 支撑严格分离，则：

$$P^{*r} = M^{*r} + E^{*r}.$$

当 r 增大时，fine residual 被卷积更多次。

因此：

高阶关系天然获得更多卷积平滑。 (59.1)

二元关系恰好是 residual 平滑最弱的最低非平凡阶。

第六十章　Chen：放宽深度而保持关系

Chen 方法在方法谱中的位置非常清楚：

固定和关系不变

而：

$$(1,1)$$

放宽为：

$$(1, \leq 2)$$

或对称形式。

所以：

它通过放宽目标深度获得额外筛余量， 而不是改变关系几何。

(60.1)

第六十一章　GPY 与 Maynard–Tao：差值进入有限带

这些方法把差值问题压入一个有限带：

$$\boxed{\exists H < \infty,}$$

使某些有限间距关系无限反复出现。

统一表述为：

$$\boxed{\text{有限差值带中至少有一个关系纤维无限活跃.}} \tag{61.1}$$

而精确固定差要求：

$$\boxed{\text{指定的 } h \text{ 本身无限活跃.}} \tag{61.2}$$

两者的区别是关系纤维的精确性。

第六十二章　Green–Tao：高阶组合结构

Green–Tao 说明素数顶点骨架中存在任意长的高阶仿射结构。

它的统一位置是：

ARBITRARILY_LONG.

它还可以通过镜像折叠、投影和边缘化向低阶关系输送信息。

但输送什么，必须由具体映射证明。

第六十三章　解析 L-函数：全局谱

L-函数方法读取的是整个原子分布经解析编码后的全局谱。

其优势在于：

- 全局性；
- 精细误差；
- 算术信息编码；
- 零点与分布之间的深层关系。

其统一位置是：

$$\boxed{\text{固定谱} \to \text{计数测度} \to L\text{-函数} \to \text{谱}.}$$

它与有限关系终端处于不同层。

第六十四章　Pocklington、Lucas、APR、ECPP：有限证书

这些方法回答：

一个具体大整数怎样被有限证明为素数？

它们对应：

有限终端认证.

第五篇的 Twin 共同 Lucas 证书说明：

单点证书可以进一步提升为关系级证书。 (64.1)

所以证书方法与关系母体在“有限终端”这一层自然汇合。

第七部　Primorial coarse–fine 与解析关系筛

第六十五章　有限循环群上的 coarse 空间

取：

$$G_L = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z},$$

并令：

$$W \mid L.$$

定义：

$$\boxed{V_W = \{f: G_L \to \mathbb{C}: f(n) \text{ 只依赖 } n \bmod W\}.} \tag{65.1}$$

令：

$$\Pi_W$$

为到 V_W 的正交投影。

对有限素数场或关系场 P，写：

$$\boxed{P = M_W + E_W,} \tag{65.2}$$

其中：

$$M_W = \Pi_W P,$$

$$E_W = (I - \Pi_W)P.$$

解释为：

$$\boxed{\text{coarse 局部周期骨架} + \text{fine 全局余量.}} \tag{65.3}$$

第六十六章　Fourier 支撑严格分离

若：

$$L = WT,$$

定义 coarse 频率集合：

$$\boxed{K_W = \{0, T, 2T, \dots, (W-1)T\}.} \tag{66.1}$$

有：

$$\mathrm{supp}\widehat{M}_W \subseteq K_W,$$

且：

$$\hat{E}_W(k) = 0 \qquad (k \in K_W).$$

所以：

$$\boxed{\mathrm{supp}\widehat{M}_W \cap \mathrm{supp}\hat{E}_W = \varnothing.} \tag{66.2}$$

这比普通 L^2 正交更强。

第六十七章　卷积严格解耦

由 Fourier 侧乘法：

$$\boxed{M_W * E_W = 0.} \tag{67.1}$$

更一般地：

$$\boxed{M_W^{*a} * E_W^{*b} = 0, \qquad a, b \geq 1.} \tag{67.2}$$

因此：

$$\boxed{P^{*r} = M_W^{*r} + E_W^{*r}.} \tag{67.3}$$

于是：

真正需要控制的非 coarse 部分，　不是复杂 mixed terms，　而是 pure fine residual 的高阶卷积。	(67.4)

图 6-09　Primorial coarse–fine 分解

有限循环群上，coarse 周期骨架与 fine 余量在 Fourier 支撑上严格分离，因此 mixed convolution 项精确消失。

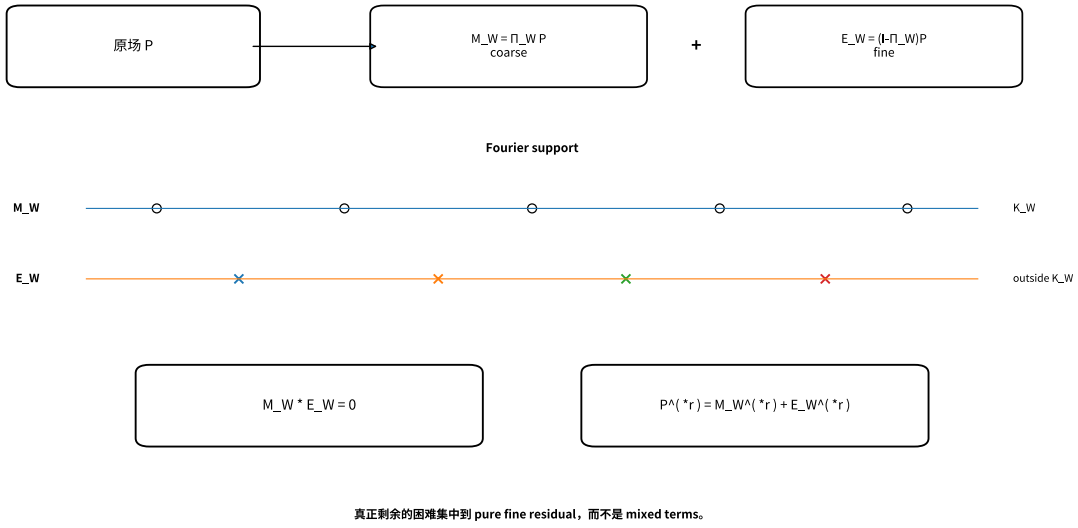


图 6-09　Primorial coarse–fine 分解。 在有限循环群 G_L 上，$P = M_W + E_W$，其中 $M_W = \Pi_W P$ 是只依赖模 W 的 coarse 周期骨架，$E_W = (I - \Pi_W)P$ 是 fine 余量。两者 Fourier 支撑严格分离，因此 $M_W * E_W = 0$，更一般地所有同时含 coarse 与 fine 因子的 mixed convolution 都消失，故 $P^{*r} = M_W^{*r} + E_W^{*r}$。

第六十八章　Primorial 壳层

令：

$$W_j = \prod_{i \le j} p_i.$$

对应投影：

$$\Pi_j = \Pi_{W_j}.$$

定义：

$$\boxed{\Delta_j P = (\Pi_j - \Pi_{j-1})P.} \tag{68.1}$$

不同壳层的 Fourier 支撑不相交，因此：

$$\boxed{\Delta_i * \Delta_j = 0 \qquad (i \neq j).} \tag{68.2}$$

每加入一个新素数模，就增加一层新的频谱信息。

第六十九章　强制筛方向与横向创新

把新壳层写成：

$$\boxed{\Delta_j P = F_j + Y_j,} \tag{69.1}$$

其中：

- F_j：由一个 child 必须被 p_j 禁止所强制产生；
- Y_j：允许 children 之间真正的不均匀。

并且：

$$F_j \perp Y_j.$$

定义：

$$\mathcal{F}_j = \| F_j \|_2^2,$$

$$\mathcal{T}_j = \| Y_j \|_2^2.$$

$\mathcal{T}_j$ 是横向创新能量。

第七十章　coarse energy 递推

定义：

$$\mathcal{C}_j = \| \Pi_j P \|_2^2.$$

则：

$$\boxed{\mathcal{F}_j = \frac{\mathcal{C}_{j-1}}{p_j - 1}.} \tag{70.1}$$

因此：

$$\boxed{\mathcal{C}_j = \frac{p_j}{p_j - 1}\mathcal{C}_{j-1} + \mathcal{T}_j.} \tag{70.2}$$

令：

$$A_j = \prod_{i \le j} \frac{p_i}{p_i - 1} = \frac{W_j}{\varphi(W_j)}.$$

定义：

$$\boxed{\mathcal{H}_j = \frac{\mathcal{C}_j}{A_j}.} \tag{70.3}$$

则：

$$\boxed{\mathcal{H}_j - \mathcal{H}_{j-1} = \frac{\mathcal{T}_j}{A_j} \ge 0.} \tag{70.4}$$

所以：

$$\boxed{\mathcal{H}_J - \mathcal{H}_k = \sum_{j=k+1}^{J} \frac{\mathcal{T}_j}{A_j}.} \tag{70.5}$$

这是一条精确的横向能量望远镜。

第七十一章　局部因子传输

令：

$$R_{r,j}(N)$$

表示第 j 个 Primorial 尺度的 r 阶关系质量。

纯局部 refinement 给出 multiplier：

$$\sigma_{r,p_j}(N).$$

二元固定和值中：

$$\boxed{\sigma_{2,p}(N)=\begin{cases}\dfrac{p}{p-1}, & p\mid N,\\[2mm] 1-\dfrac{1}{(p-1)^2}, & p\nmid N.\end{cases}} \tag{71.1}$$

真实 refinement 与完全均匀 allowed-child 模型之间的差记作：

$$\varepsilon_{r,j}(N).$$

于是：

$$\boxed{R_{r,j}(N)=\sigma_{r,p_j}(N)R_{r,j-1}(N)+\varepsilon_{r,j}(N).} \tag{71.2}$$

第七十二章　有限 Duhamel 公式

从尺度 k 迭代到 J：

$$\boxed{R_{r,J}(N) = R_{r,k}(N) \prod_{\ell=k+1}^{J} \sigma_{r,p_\ell}(N) + \sum_{m=k+1}^{J} \varepsilon_{r,m}(N) \prod_{\ell=m+1}^{J} \sigma_{r,p_\ell}(N).} \tag{72.1}$$

这是完全有限、零误差的恒等式。

它把所有信息分成：

$$\boxed{\text{显式局部 sieve geometry} + \text{transverse forcing.}} \tag{72.2}$$

第八部　parity、child-mode 与二元关系边界

第七十三章　乘法深度 parity

定义：

$$\boxed{\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}.} \tag{73.1}$$

正筛主要保存：

是否逃过小素因子.

而 λ 保存：

乘法深度奇偶.

因此：

$$\boxed{\text{parity barrier} \quad = \quad \text{非平凡乘法深度字符} \quad (-1)^{\Omega} \quad \text{在纯正筛信息中被遗失。}} \tag{73.2}$$

第七十四章　rough survivor 与 signed survivor

记：

$$R_z$$

为 z-rough survivor field；

$$L_z$$

为带 λ 符号的 survivor field。

在 surviving multiplicative depth 只剩：

$$1,\quad 2$$

时，可以通过：

$$\boxed{\begin{pmatrix} P_z \\ Q_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_z \\ L_z \end{pmatrix}.} \tag{74.1}$$

恢复 prime 与 P_2 通道。

这说明：

增加一个 signed depth channel，　　可以恢复纯正筛已经丢失的一部分身份。	(74.2)

第七十五章　固定和值的 parity-resolved 分解

定义：

$$\mathsf{G}_z(N) = (P_z * P_z)(N).$$

由：

$$P_z = \frac{1}{2}(R_z - L_z),$$

得到：

$$\boxed{4\mathsf{G}_z(N) = (R_z * R_z)(N) - 2(R_z * L_z)(N) + (L_z * L_z)(N).} \tag{75.1}$$

定义：

$$A_z(N) = (R_z * R_z)(N),$$

以及：

$$\boxed{\mathfrak{P}_G(N;z) = 2(R_z * L_z)(N) - (L_z * L_z)(N).} \tag{75.2}$$

于是：

$$\boxed{4\mathsf{G}_z(N) = A_z(N) - \mathfrak{P}_G(N;z).} \tag{75.3}$$

若：

$$A_z(N) > 0,$$

定义：

$$\boxed{\Theta_G(N;z) = \frac{\mathfrak{P}_G(N;z)}{A_z(N)}.} \tag{75.4}$$

则：

$$\boxed{\mathsf{G}_z(N) > 0 \Leftrightarrow \Theta_G(N;z) < 1.} \tag{75.5}$$

固定和值灭绝恰对应：

$$\boxed{\Theta_G = 1.} \tag{75.6}$$

第七十六章　parity saturation 的吸收性质

若一个目标已经达到：

$$\Theta_G = 1,$$

对应 prime-prime 关系质量为零。

这一状态在单纯正筛 refinement 下不是“自动恢复”的不稳定态。

正确结构是：

parity saturation 是吸收态。 (76.1)

因此真正需要分析的是：

第一次灭绝何时能够发生？ (76.2)

第七十七章　第一次灭绝与关系图顶点覆盖

设一步 filtering 前的 odd-depth survivor 集为：

$$O.$$

新素数 p 实际真实删除：

$$K_p^\sharp \subset O.$$

把固定和值关系写成图：

$$x + y = N.$$

新层使目标 N 的全部旧关系灭绝，当且仅当：

$$\boxed{K_p^\sharp \text{ 成为旧关系图的顶点覆盖.}} \tag{77.1}$$

对典型：

$$p \nmid N$$

情形，一条关系边的两个端点不能同时被 p 真实删除。

于是 first extinction 要求：

$$\boxed{\text{每一条旧关系边恰好有一个端点进入 killer set.}} \tag{77.2}$$

这把抽象 parity saturation 转换成一个非常具体的关系—余类塌缩。

第七十八章　ordinary death 与 true death

ordinary divisibility sieve 中：

$$p \mid n$$

常被视为当前层命中。

但：

$$n = p$$

本身是新原子，不是死亡。

因此：

$$\boxed{\text{ordinary death} \neq \text{true death.}} \tag{78.1}$$

关系筛必须使用：

$$P^{-}(n) = p$$

来记录真实 first-killer。

这是第四、第五篇真实死亡结构的统一来源。

第七十九章　Child-mode anisotropy

在 refinement：

$$W_{j-1} \to W_j = W_{j-1} p_j$$

中，把 transverse field 写成：

$$Y(A, B),$$

其中 A 为 parent coordinate，B 为 child coordinate。

定义：

$$\boxed{S_B(A) = (Y * Y)(A, B).} \tag{79.1}$$

child Fourier transform：

$$\boxed{Q_\xi(A) = \sum_{B \bmod p} S_B(A) e_p(-\xi B).} \tag{79.2}$$

由于 transverse field 无 child 零模：

$$Q_0(A) = 0.$$

所以：

$$\boxed{\sum_{B \bmod p} S_B(A) = 0.} \tag{79.3}$$

定义：

$$\overline{Q}(A) = \frac{1}{p-1} \sum_{\xi \neq 0} Q_\xi(A),$$

以及：

$$\boxed{\mathfrak{A}_p(A)^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{\xi \neq 0} |Q_\xi(A) - \overline{Q}(A)|^2.} \tag{79.4}$$

Parseval 给出：

$$\boxed{\mathfrak{A}_p(A)^2 = \frac{p}{p-1} \sum_{B \neq 0} \left| S_B(A) + \frac{S_0(A)}{p-1} \right|^2.} \tag{79.5}$$

所以：

$$\boxed{\text{child-mode anisotropy}\quad \text{就是不同非零 child targets 之间的关系分配方差。}} \tag{79.6}$$

图 6-10　parity-resolved 二元关系分解

rough survivor 加上 signed depth channel，可以把浅层 survivor 拆回 prime 与 P2 通道；固定和值再由四个 parity 通道精确组合。

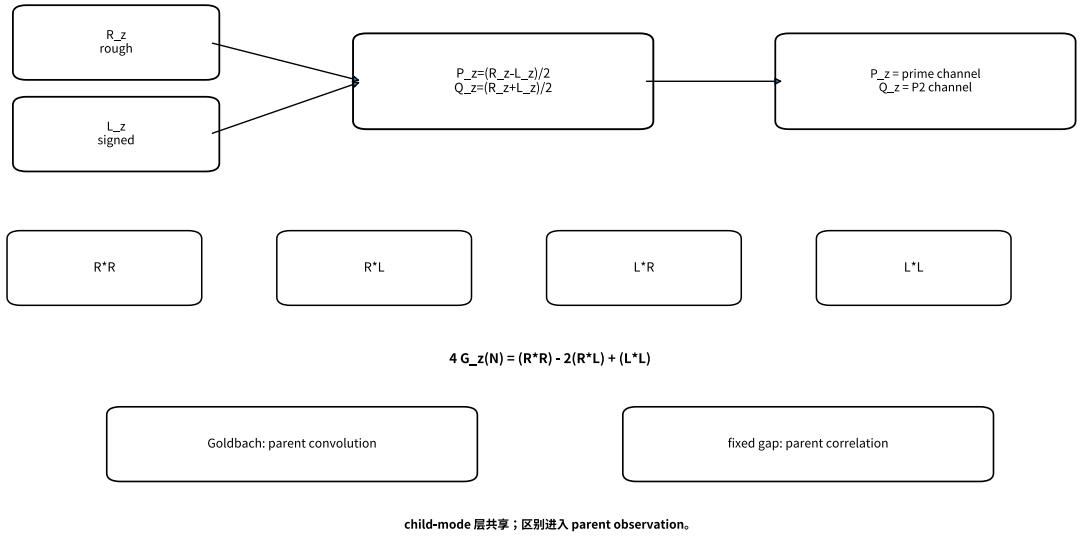


图 6-10　parity-resolved 二元关系分解。 当 rough survivor 的乘法深度只剩 1,2 时，rough 场 R_z 与带 $\lambda = (-1)^{\Omega}$ 符号的场 L_z 可恢复 prime 通道 $P_z = (R_z - L_z)/2$ 与 P_2 通道 $Q_z = (R_z + L_z)/2$。固定和值满足 $4\mathrm{G}_z = (R_z * R_z) - 2(R_z * L_z) + (L_z * L_z)$；Goldbach 与固定差共享 child-mode 层，区别进入 parent 的 convolution / correlation 读取。

第八十章　Goldbach 与固定差的解析对偶

Goldbach 读取 parent convolution：

$$\tilde{Y}_{\xi} * \tilde{Y}_{\xi}.$$

固定差读取 parent correlation：

$$\tilde{Y}_{\xi} \star \tilde{Y}_{\xi}.$$

child-mode 层相同。

因此：

Goldbach 与固定偶差共享同一个 child-mode anisotropy；　区别进入 parent observation：　一个是	(80.1)

这与第三篇二原子关系平面的“和值/差值双切片”完全一致，只是这里使用 Fourier–child language 读取同一事实。

第八十一章　平均控制与 all-target 的距离

对 binary residual，fourth moment 可以控制异常目标数量。

典型结构：

$$\sum_{N} |E_X(N)|^2 \le \int_{\mathfrak{m}} |S_X(\alpha)|^4 \, d\alpha.$$

这类工具可以推出：

$$|\mathcal{E}(X)| = o(X)$$

或更强 exceptional-set 控制。

但：

$$\boxed{\text{异常目标比例趋零} \not\Rightarrow \text{异常目标为空.}} \tag{81.1}$$

因此：

$$\boxed{\text{平均结构与全称关系之间存在真正的量词距离。}} \tag{81.2}$$

第八十二章　pure positive energy 的信息边界

coarse energy、transverse energy、L^q norms、fourth moments 等绝对值量主要描述：

有多少振荡或能量.

而 multiplicative-depth parity 描述：

这些质量属于哪个乘法深度通道.

因此：

能量描述“多少”；　parity character 描述“属于哪一类”。 (82.1)

纯正能量不能单独恢复已经丢失的深度符号。

第八十三章　单尺度 reflection gap 的边界

一个单独 prime scale 可以出现高度相干的反射结构。

所以不能要求：

$$\boxed{\text{每一层都存在统一正 reflection gap.}}$$

正确的跨尺度问题是：

$$\boxed{\text{高度相干能否跨许多 prime scales 持续存在？}} \tag{83.1}$$

这也是关系履历、跨尺度累计与 child-mode 结构的意义所在。

第八十四章　moving-target determinant 结构

固定 shift 的双线性技术常利用小行列式结构。

在 fixed-sum moving target 中，会出现：

$$\boxed{bmn - ars = N(b - a).} \tag{84.1}$$

这里：

$$N \asymp x$$

本身随目标移动。

因此 fixed-shift 的 small-determinant 结构不能直接照搬到 moving-target fixed-sum 关系。

这说明：

工具的适配性取决于关系几何， 而不是只取决于公式表面相似。

(84.2)

第八十五章　RWF-II 作为解析接口

在：

$$z = N^{1/4-\varepsilon}$$

附近，rough odd-depth survivor 可进入：

$$P_1 \cup P_3$$

结构。

一种反射型 well-factorable Type-II 目标具有形式：

$$\boxed{\sum_{d,m} \omega_d^- \lambda(d)\lambda(m)\Lambda(N-dm) = o(N/\log z).} \tag{85.1}$$

其中：

$$D = N^{1/2-o(1)}.$$

这类估计的意义是：

把 fixed-sum moving-target 的深层 residual　压入极窄乘法深度结构。

它属于解析接口，而不改变关系母体本身。

第九部　方法能力边界总表

第八十六章　方法与信息层级

方法	主要保存的信息	最自然的输出
埃拉托斯特尼筛	单点乘法占位	prime/composite 初级分离
Brun 筛	多端 rough escape	pair/tuple 上界与候选
Selberg 筛	优化局部排除	加权筛界
组合筛 / 线性筛	roughness + 浅深度	P_r 结果
大筛	多模平均分布	均方与平均控制
Bombieri–Vinogradov	平均 AP 分布	平均级别强控制
圆法	固定和 Fourier 结构	高阶加法主项与误差
Chen	固定和 + 放宽深度	prime + P_2
GPY / Maynard–Tao	有限差值带	bounded gaps
Green–Tao	高阶仿射结构	任意长 AP
L-函数	全局谱	密度、误差、零点关系
Pocklington / Lucas / APR / ECPP	单点有限身份	可验证素性证书
关系级 Lucas	多端共同群阶	有限关系证书

这张表的核心不是“谁更强”。

它回答：

> 一种方法到底保存了哪一种信息。

图 6-08　经典方法能力矩阵

每一行只标本书第六篇第 86 章为该方法列出的主要信息层级；空白不表示无用，只表示不是该方法的主输出。

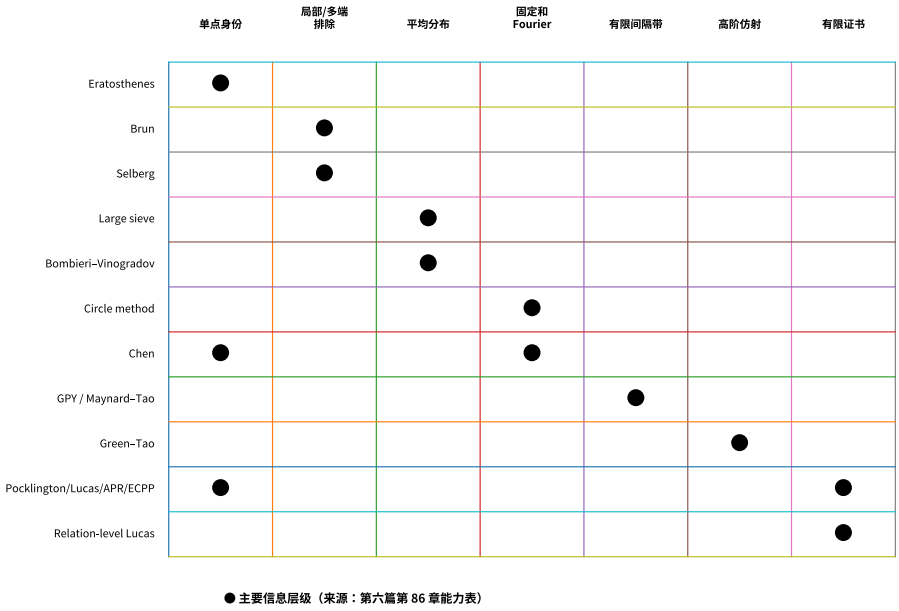


图 6-08　经典方法能力矩阵。 矩阵只标示第六篇能力表中各经典方法主要保存或控制的信息层级。筛法、平均分布、圆法、有限间隔方法、高阶仿射方法与有限证书各有自己的主信息输出；统一关系对象并不意味着强迫所有问题使用同一种工具。

第八十七章　高阶方法何时能进入低阶命题

一个高阶方法要直接进入低阶目标，至少需要满足一个明确接口：

$$\boxed{\text{高阶对象} \to \text{低阶 witness.}}$$

可能的接口包括：

1. 明确投影；
2. 镜像折叠；
3. 精确计数恒等式；
4. 统一正下界；
5. 坏状态排除；
6. 与目标量词匹配的累计下界。

若不存在这样的接口，那么高阶结构仍然有意义，但它只属于另一个层级。

第八十八章　almost-all 与 all-target

“几乎所有”意味着异常集合相对稀少。

“每一个”意味着异常集合为空。

因此：

$$\boxed{\text{almost-all 是密度命题；　　all-target 是空集命题。}} \tag{88.1}$$

从前者进入后者，需要一个能够排除最后异常点的额外结构。

这不能由“异常比例已经非常小”替代。

第八十九章　bounded band 与 fixed fiber

若证明：

$$\exists h \le H$$

使某个 gap 关系无限反复出现，得到的是有限带结论。

若目标是：

$$h = h_0$$

本身无限，则必须把关系纤维固定到 h_0。

因此：

有限带存在性不能替代指定纤维持续性。 (89.1)

第九十章　almost-prime 与 prime-depth

若方法只得到：

$$\Omega(n) \le 2,$$

它不能自动替代：

$$\Omega(n) = 1.$$

所以：

浅乘法深度不是 prime-depth 的同义词。 (90.1)

但浅深度结果仍然极有价值，因为它准确说明关系已经被压到母体中哪些深度层。

图 6-11　平均控制 vs all-target

三组量词落差：almost-all 不等于 all-target；bounded band 不等于 fixed fiber；almost-prime 不等于 prime-depth。

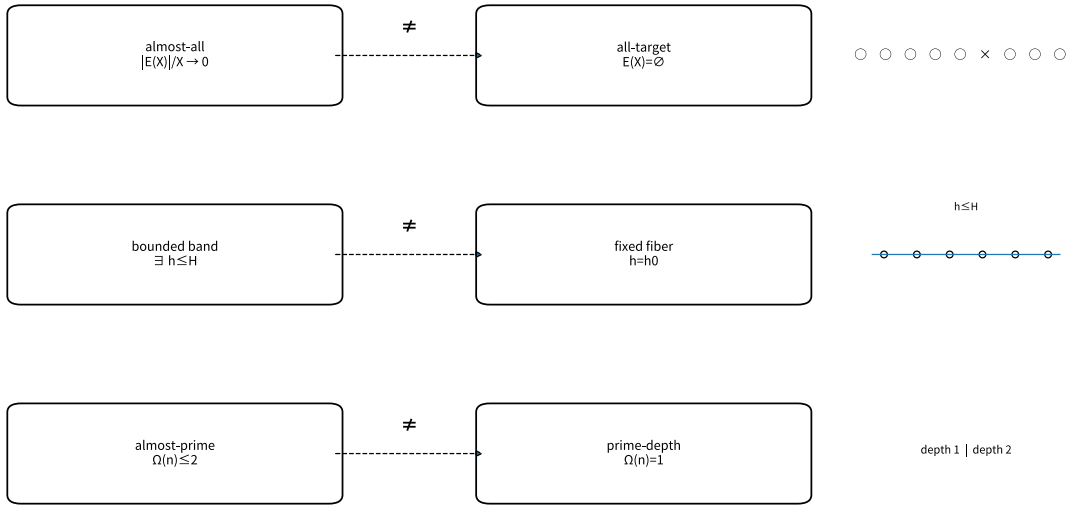


图 6-11　平均控制 vs all-target。 第六篇强调三种不可混同的量词落差：异常集合比例趋零并不推出异常集合为空，因此 almost-all 不等于 all-target；存在某个 $h \le H$ 的无限关系不等于指定 fiber $h = h_0$ 无限；$\Omega(n) \le 2$ 也不等于 prime-depth $\Omega(n) = 1$。从左侧结论进入右侧目标，都需要额外结构排除最后的例外、带宽或深度缺口。

第九十一章　高阶平滑与低阶刚性

高阶加法关系常具有：

$$P^{*r}$$

中的多次卷积平滑。

低阶二元关系只有：

$$P * P.$$

所以：

高阶关系更容易获得平均平滑； 低阶关系更直接暴露极端相位。

(91.1)

这不是方法优劣，而是关系阶数本身的结构差异。

第十部　生成复杂度

第九十二章　关系困难如何比较

定义一个有限关系对象 R 的生成复杂度：

$$\boxed{\mathsf{C}_{\mathrm{gen}}(R) = \inf\{\text{足以生成并终端认证 } R \text{ 的有限历史成本}\}.} \tag{92.1}$$

分解为：

$$\boxed{\mathsf{C}_{\mathrm{gen}} = (\mathsf{C}_{\mathrm{layer}}, \mathsf{C}_{\mathrm{horizon}}, \mathsf{C}_{\mathrm{relation}}, \mathsf{C}_{\mathrm{certificate}}).} \tag{92.2}$$

第九十三章　原子层复杂度

$$\mathsf{C}_{\mathrm{layer}}$$

记录需要推进多少乘法控制层。

例如一个最大端点为 H 的有限关系，最朴素认证只需要：

$$q \le \sqrt{H}.$$

若有更强结构，可以提前终端。

第九十四章　视界复杂度

$$C_{\text{horizon}}$$

记录目标所需的数值尺度或窗口宽度。

这里必须区分：

$$\boxed{\text{坐标大小}\quad \text{与}\quad \text{窗口宽度.}} \tag{94.1}$$

一个位于 10^{18} 附近但宽度只有 10^{6} 的窗口，与从 0 稠密扫描到 10^{18} 是完全不同的计算对象。

第九十五章　关系复杂度

$$C_{\text{relation}}$$

记录：

- 关系阶数；
- 端点数；
- 位置映射复杂度；
- 关系字母表；
- 匹配或窗口结构；
- 可能的死亡类型；
- 量词类型。

第九十六章　证书复杂度

$$C_{\mathrm{certificate}}$$

记录最终关系怎样被压缩成独立可验证证书。

例如：

- 小整数 trial division；
- Lucas–Lehmer；
- Pocklington；
- ECPP；
- 共同 Lucas 关系证书；
- 匹配证书。

所以不同问题的“难度”可以被拆成多种不同成本，而不是只靠题目名称比较。

图 6-12　生成复杂度四层图

问题难度拆成原子层、视界、关系与证书四种成本；不同问题可以在不同层面困难。

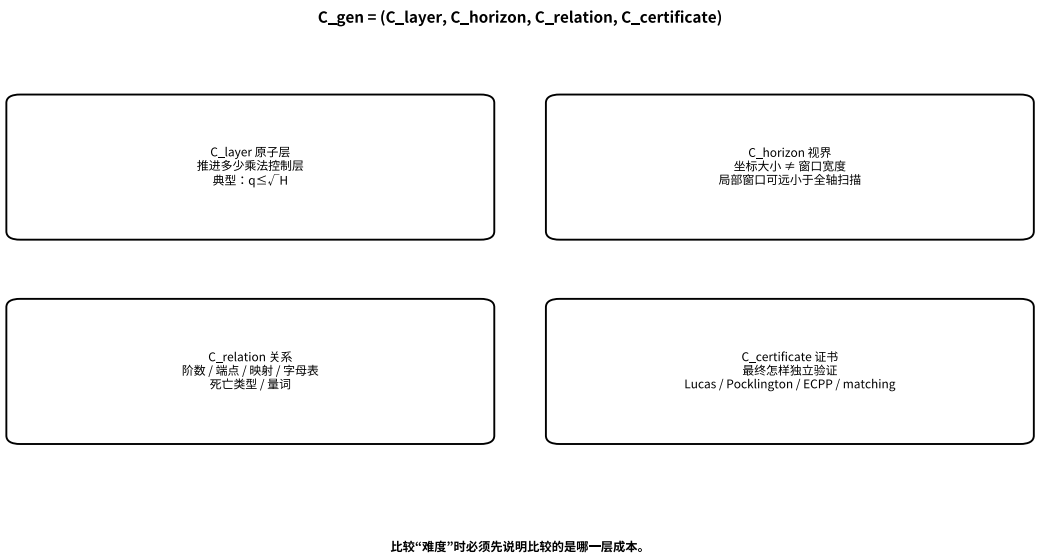


图 6-12　生成复杂度四层图。 生成复杂度写成 $C_{\mathrm{gen}} = (C_{\mathrm{layer}}, C_{\mathrm{horizon}}, C_{\mathrm{relation}}, C_{\mathrm{certificate}})$。四个分量分别记录推进多少乘法控制层、目标所需的数值视界或窗口宽度、关系阶数与位置/字母表/量词结构，以及最终如何压缩成独立可验证证书。因此不同问题的“难度”不能只按题名比较。

第十一部　经典关系的统一总表

第九十七章　关系位置总表

关系	轨道 / 窗口	目标身份	量词类型
Goldbach	$p, N-p$	P_1, P_1	全称纤维
Lemoine/Lévy	$p, (N-p)/2$	P_1, P_1	全称纤维
弱 Goldbach	$p_1+p_2+p_3=N$	P_1^3	全称纤维
Chen	$p+q=N$	$P_1, P_{\le 2}$	全称型
Twin	$p, p+2$	P_1, P_1	无限回归
Polignac	$p, p+2h$	P_1, P_1 + 间隔条件	无限回归
Sophie Germain	$p, 2p+1$	P_1, P_1	无限回归
prime tuple	$n+H$	P_1^k	无限回归
Green–Tao	AP 流形	P_1^k	任意长度
Dirichlet	$a+qn$	P_1	无限回归
Bertrand	$(x, 2x)$	窗口含 P_1	窗口全称
Legendre	$(n^2, (n+1)^2)$	窗口含 P_1	窗口全称
Oppermann	双平方半窗口	各含 P_1	窗口全称
Brocard	prime-square 窗口	P_1 计数	全称谓词
Andrica	(p_n, p_{n+1})	gap 度量	全称谓词
Firoozbakht	(p_n, p_{n+1})	归一增长	全称谓词
n^2+1	二次轨道	P_1	无限回归
Bunyakovsky	多项式轨道	P_1	无限回归
Schinzel H	多项式束	P_1^k	无限回归
Mersenne	2^p-1	P_1	参数无限/无限回归
Fermat	$2^{2^n}+1$	P_1	稀疏轨道
Waring–Goldbach	幂和流形	P_1^r	固定和型
Grimm	连续合数块	因子集合匹配	全称谓词
Erdős–Woods	因子身份块	块分离	块分离
PNT	自然轴	prime density	密度
PNT in AP	同余子格	prime density	密度
RH/GRH	L-函数谱	全局振荡	谱

第九十八章　Landau 四题总表

Goldbach	固定和
Twin	固定差
Legendre	平方窗口
n^2+1	二次轨道

(98.1)

这四个问题说明：

统一素数关系理论的核心不是“所有问题长得一样”， 而是不同几何都能在同一个固定身份母体中被无损表达。

第九十九章　一个新关系进入母体的标准步骤

对任何新的素数关系，依次回答：

1. 固定谱中读取哪些字段？
2. 关系阶数是多少？
3. 位置映射是什么？
4. 关系轨道是什么？
5. 允许的乘法深度是什么？
6. 有无局部完全阻塞？
7. 自然有限观察区域是什么？
8. 终端视界在哪里？
9. 真实死亡怎样记录？
10. 关系供给怎样定义？
11. 吸收容量怎样定义？
12. 高阶结构能否恢复低阶 witness？
13. 外层量词是哪一种？
14. 对应的批量闭合器是什么？
15. 最终证书怎样独立验证？

因此：

$$\boxed{\text{固定谱} \to \text{关系轨道} \to \text{目标深度} \to \text{局部阻塞} \to \text{有限视界} \to \text{关系筛} \to \text{量词闭合} \to \text{证书.}} \tag{99.1}$$

图 6-13　新关系进入母体的标准步骤

第九十九章的 15 个问题压缩成八个标准工作流节点，可直接作为新关系研究模板。

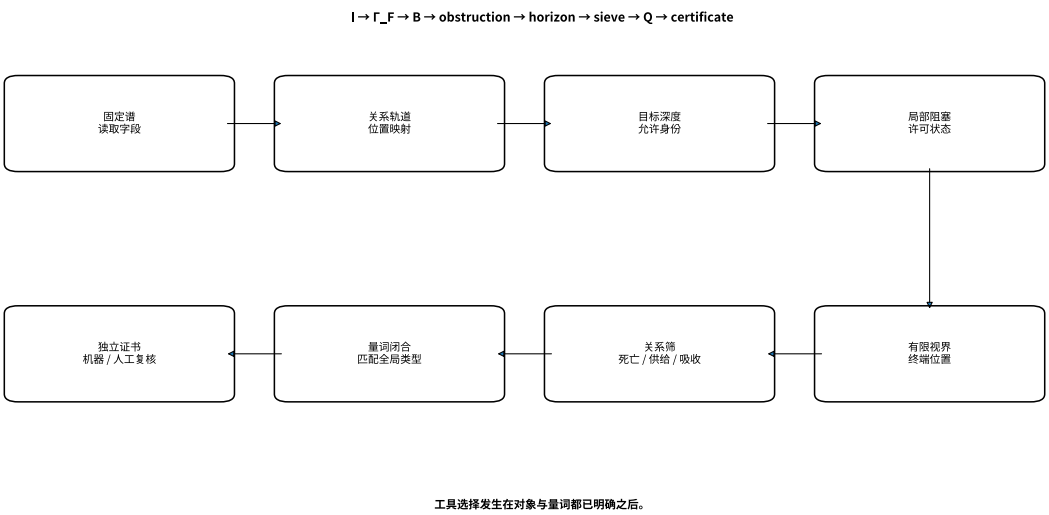


图 6-13　新关系进入母体的标准步骤。 第九十九章的十五个检查问题可压缩成标准工作流：固定谱读取 → 关系轨道与位置映射 → 目标乘法深度 → 局部阻塞/许可 → 有限视界与终端 → 关系筛中的真实死亡、供给与吸收 → 外层量词闭合 → 独立证书。具体工具应在关系对象和量词类型都明确之后选择。

第一百章　统一对象层，不统一具体工具

统一母体固定的是：

$$\boxed{\text{固定身份} + \text{关系生成} + \text{履历持久} + \text{有限认证} + \text{关系读出} + \text{量词接口}.} \tag{100.1}$$

它不要求所有问题使用同一种上层工具。

不同关系可以使用：

- 关系筛；
- 组合筛；
- 圆法；
- 大筛；
- L-函数；
- 组合结构；
- 有限证书；
- 专门的 matching；
- 专门的大整数算法。

但这些方法都作用于已经明确的关系对象。

所以：

$$\boxed{\text{底层对象与关系语言统一；}\quad\text{上层方法保持自由。}} \tag{100.2}$$

这不是折衷。

它正是一个成熟统一理论应有的分层。

经典命题形式证明总表

经典命题	关系标准形	量词 / 结论接口
Goldbach	$G(m) > 0$	universal fiber
Lemoine / Lévy	$L(N) > 0$	universal fiber
弱 Goldbach	三元固定和非空	universal fiber
Chen	prime + depth ≤ 2	eventual universal fiber
Twin	$C_T(X)$ 无界	infinite recurrence
Polignac	$P_h(p) = 1$ 无限回归	fixed-gap recurrence
Sophie Germain	$SG(p) = 1$ 无限回归	infinite recurrence
prime k-tuple	$C_H(X)$ 无界	infinite recurrence
Green–Tao	$\forall k\ \exists a, d$	arbitrarily long
Dirichlet	$C_{a,q}(X)$ 无界	infinite recurrence
PNT / PNT in AP	素数计数渐近	statistical
Bertrand	$W_B(x) \geq 1$	window universal
Legendre	$W_L(n) \geq 1$	window universal
Oppermann	$W_-(n), W_+(n) \geq 1$	double-window universal
Brocard	$B(n) \geq 4$	universal predicate
Andrica	$A_n < 1$	universal predicate
Firoozbakht	归一化对数严格下降	universal predicate
$n^2 + 1$	$C_2(X)$ 无界	infinite recurrence

经典命题	关系标准形	量词 / 结论接口
Bunyakovsky	$C_f(X)$ 无界	infinite recurrence
Schinzel H	$C_f(X)$ 无界	infinite recurrence
Mersenne	$P_M(X)$ 无界	parameter infinite
Fermat prime 无限形式	$C_F(X)$ 无界	parameter infinite
Waring–Goldbach	$\mathcal{W}_{k,r}(N) \neq \varnothing$	universal fiber on target domain
Grimm	因子集合二分图匹配	universal predicate
Erdős–Woods	B_K 单射	block separation
RH / GRH	零点满足 $\Re s = 1/2$	global spectral

因此：

每一个经典命题都能无损进入同一套对象—关系—量词语言， 同时保持自己不可删除的几何、量词与证书类型。

(T.F)

图 6-14　第六篇经典命题总表可视化索引

横向按六种关系几何，纵向按七类主要量词/读出组织；用于快速定位，不替代正文中的完整定义。

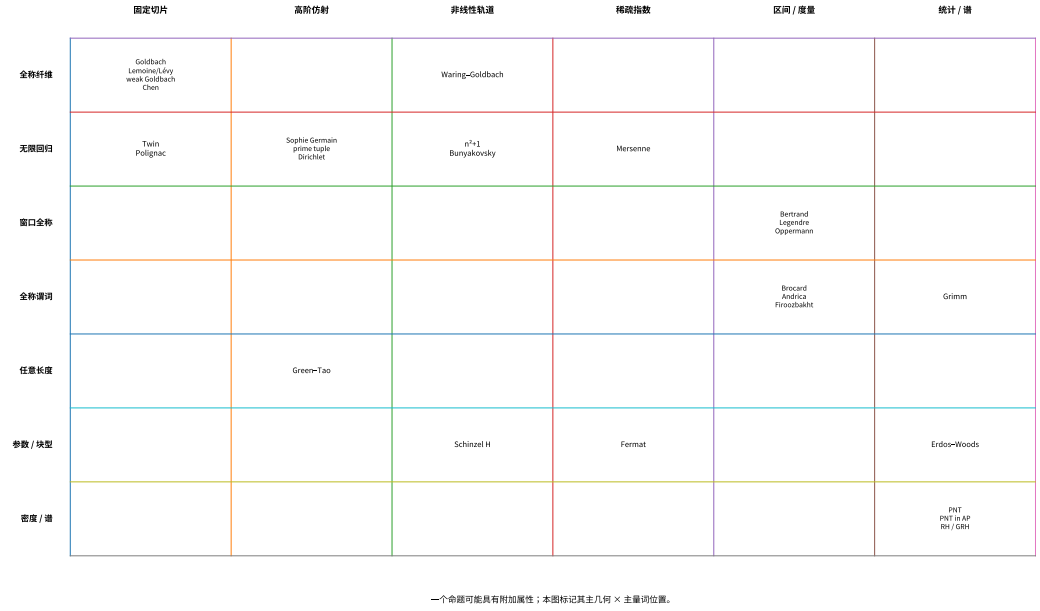


图 6-14　第六篇经典命题总表可视化索引。 本图把第九十七章的具名关系按六种主关系几何与七种主要量词/读出位置组织成索引。Goldbach、Twin、Legendre、Green – Tao、Bunyakovsky、Mersenne、Grimm、Erdős – Woods、PNT、RH/GRH 等因此可以在同一张地图中快速定位。一个命题仍可能具有附加几何或量词属性；图中只标主位置。

结语　经典问题不再彼此孤立，经典方法也不再彼此冲突

素数理论之所以显得如此分散，一个重要原因是不同问题长期由不同语言书写：

- 有的问题写成加法；
- 有的问题写成差值；

- 有的问题写成区间；
- 有的问题写成多项式；
- 有的问题写成指数；
- 有的问题写成因子集合；
- 有的问题写成 Fourier 积分；
- 有的问题写成 L-函数；
- 有的问题写成 primality certificate。

如果只看这些表层语言，它们很容易像不同世界。

统一素数关系理论把它们重新放回同一层级。

首先只有一张固定算术身份谱：

$$\boldsymbol{I}.$$

在它之上形成原子层：

$$\mathcal{A}.$$

原子之间形成持久关系场：

$$\Gamma.$$

每一个具体问题再选择：

$$\Gamma_F, \qquad B, \qquad \mathcal{R}, \qquad Q.$$

所以：

一个新的素数关系不是重新定义素数； 它是在同一个已经生成的关系母体上， 指定关系轨道、乘法深度、观察区域和整体要求。

这使经典问题之间第一次可以在同一个对象层级上比较。

Goldbach 与 Twin 共享二原子关系平面：

一个读和值， 一个读差值。

Chen 与 Goldbach 共享关系几何：

改变的是目标深度。

Green–Tao 与 prime tuples 共享高维仿射结构：

一个固定模板， 一个任意长度模板。

Legendre、Oppermann、Brocard 共享窗口语言：

区别在窗口生成器与窗口谓词。

Bunyakovsky、Schinzel H、Mersenne、Fermat 共享轨道语言：

区别在线性、多项式、指数与双指数轨道。

Grimm 与 Erdős–Woods 则说明：

统一母体并不只会读取 prime/composite； 完整因子集合本身也属于固定算术身份。

经典命题也不再只停留在“可以这样理解”的层面。

Goldbach 已经被证明与

$$A \boxplus A = \mathbb{Z}_{\geq 3}$$

以及自然终端段覆盖完全等价，并已在第四篇完成全称闭合；

Twin 已经被证明与

$$C_T(X) \text{ 无界}$$

以及任意远平方视界持续命中完全等价，并已在第五篇完成无限回归闭合；

窗口命题与窗口计数正性等价；

多项式与指数命题与相应轨道累计无界等价；

Grimm 与因子集合二分图匹配等价；

Erdős–Woods 与固定长度身份块映射的单射性等价。

因此：

形式证明就是“原命题没有在统一语言中丢失”的数学证明。

经典方法同样得到自己的准确位置。

埃拉托斯特尼看见：

乘法占位.

Brun、Selberg、组合筛看见：

局部逃逸与浅乘法深度.

大筛和 Bombieri–Vinogradov 看见：

平均同余分布.

圆法看见：

固定和频率.

GPY 与 Maynard–Tao 看见：

有限差值带.

Green–Tao 看见：

高阶仿射结构.

L-函数看见：

全局谱.

Pocklington、Lucas、APR、ECPP 看见：

有限终端证书.

这些方法并不互相取消。

它们之所以得到不同类型的结论，是因为它们保存了不同类型的信息。

因此本篇最重要的一句方法论是：

方法的能力边界，首先由它保存了什么信息决定。

而高阶与低阶之间最重要的一句纪律是：

高阶结构可以增加冗余；　　低阶命题仍必须恢复低阶见证。

这两句话共同解释了为什么：

almost-all

不能自动变成：

all-target;

bounded band

不能自动变成：

fixed fiber;

P_2

不能自动变成：

P_1;

高阶存在

也不能自动变成：

低阶全称.

但只要存在无损映射，高阶结构就能够真正向低阶输送信息。

Green–Tao 的镜像折叠和固定和值见证场的多列持续恒等式已经给出两个清楚例子。

所以统一并不意味着把所有问题压成一种形式。

真正的统一是：

> **同一个母体允许不同关系保持自己的几何， 不同方法保持自己的自由， 同时所有对象、见证和量词都能在共同语言中准确对接。**

至此，全书的数学主干形成六层：

第一篇：固定身份与原子关系母体
⇓
第二篇：有限移动视界与关系还原
⇓
第三篇：关系切片、导出几何与量词结构
⇓
第四篇：CRT 生存树、真实死亡与关系筛
⇓
第五篇：有限证书、供给—吸收与无限量词
⇓
第六篇：经典命题形式证明、关系全集与方法边界.

数学对象已经完成统一。

所有这些定义、关系、参数、有限证书和量词接口，都可以进一步进入同一个可执行解释器。

这将使：

理论语言 → 可执行关系语言 → 可重复计算与验证

成为同一结构的三个层次。

第七篇　RenSpectrum：理论的可执行实现与开放关系语言

——固定谱解释器、形式证明接口、关系编译、计算引擎与开放共同入口

本篇主旨

前六篇建立了统一素数关系理论的数学主体。

这一主体包括：

固定身份谱 → 关系还原 → 导出几何与关系切片 → CRT 生存树与真实死亡 → 有限证书与全局量词 → 经典命题形

本篇把这些对象转化为可执行形式。

RenSpectrum 不是理论的证明来源；　它是理论的执行器、检查器与实验前端。

数学定理规定什么可以推出；　第六篇的形式证明规定经典命题怎样无损进入统一关系语言；RenSpectrum 负责把定义编译成有限任务，把关系展开成逐项身份，把证书与计算路径完整呈现，并把每一次有限验收保存为可重复记录。

因而：

经典命题 ↔ 关系标准形 → RSL → RenSpectrum 执行 → 证书与验证等级.

第一个双向箭头属于数学形式证明，后面的箭头属于可执行实现：它们共享同一关系对象。

摘要

RenSpectrum 是本书统一素数关系理论的可执行实现。

中文简称为：

任谱

完整中文名称为：

任谱 · 统一素数关系工作台

英文工作台名称为：

RenSpectrum · Unified Prime-Relation Workbench

正式英文名称为：

Ren Prime-Relation Spectrum (RPRS):

A Fixed-Spectrum Interpreter for Prime and Arithmetic Relations

“Ren”与中文“任”相对应；“Spectrum”指固定算术身份谱以及由同一固定谱读出的关系谱。因而 RenSpectrum 的含义不是“再造一张素数表”，而是：

在固定整数身份谱上编译、读取和检查不同算术关系。

软件的核心原则与全书一致：

母体只提供身份；　关系只选择读取；　命题只规定量词。

第六篇已经把 Goldbach、Twin、Lemoine / Lévy、弱 Goldbach、Chen、Polignac、Sophie Germain、prime k-tuple、Green–Tao、Dirichlet、Bertrand、Legendre、Oppermann、Brocard、Andrica、Firoozbakht、n^2+1、Bunyakovsky、Schinzel H、Mersenne、Grimm、Erdős–Woods 等命题逐项写成形式等价链。

因此 RenSpectrum 的执行对象可以附带完整的形式证明元数据：

$$\text{经典命题} + \text{关系标准形} + \text{量词类型} + \text{证书接口} + \text{验证等级}.$$

例如 Goldbach 的关系标准形读取为：

$$G(m) > 0 \Leftrightarrow \Gamma_{\infty}^{(\sigma=m)} \neq \varnothing,$$

Twin 的关系标准形读取为：

$$C_T(X) \text{ 无界} \Leftrightarrow \#\Gamma^{[1]} = \infty.$$

软件执行有限实例与证书，形式证明保证这些执行对象与经典命题之间的数学含义一致。

RenSpectrum 将这一原则实现为七个可执行模块：

1. 任务规模与设备能力预判；
2. 快速关系读取；
3. 无限性 / 全称性接口；
4. 接缝、循环与可持续性；
5. 逐原子 / 逐项关系谱；
6. 局部阻塞与吐出—吸收证书；
7. RSL 开放关系语言。

快速读取模块把内置关系统一编译为：

$$\mathcal{Q}_{\Theta,x}[\mathcal{B}_{\Theta}(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)),\dots,\boldsymbol{I}(f_r(x;\Theta)))].$$

系统同时显示：

- anchor；
- 位置映射；
- 每个位置的固定身份；
- 局部关系字；
- 当前有限视界的命中 / 未命中；

- 所属量词类型；
- 适用的附加证书。

无限性模块不把所有无穷命题混在一起，而识别：

INF_RECURRENCE, UNIVERSAL_FIBER, WINDOW_UNIVERSAL,

ARBITRARILY_LONG, PARAMETER_INFINITE, UNIVERSAL_PREDICATE, BLOCK_SEPARATION.

接缝模块同时读取：

$$\boxed{\text{生成接缝 } s^2,}$$

$$\boxed{\text{相位接缝 } W_z,}$$

以及全部素数平方形成的：

$$\boxed{\text{平方接缝族.}}$$

固定偏移模板

$$H$$

自动进入局部阻塞与吐出—吸收模块。系统计算：

$$v_H(q), \quad v_H(q), \quad B_H, \quad U, \quad \mu_H(Q),$$

$$C_H^{\mathrm{exact}}, \quad C_H^{\mathrm{struct}}, \quad e_H^{\mathrm{exact}}, \quad e_H^{\mathrm{struct}}, \quad T_H, \quad D_H.$$

其中：

$$\boxed{D_H \le \mu_H(Q)|U|,}$$

$$\boxed{T_H \ge e_H^{\mathrm{exact}} \ge e_H^{\mathrm{struct}}.}$$

内置关系包括固定和、固定差、连续固定差、仿射、有限模板、等差束、平方窗口、相邻素数指标、指数 / 多项式拉回、完整因子集合关系以及若干混合关系示例。

预置目录不是系统的理论边界。开放关系语言 **RSL**（Relation Specification Language，关系规范语言）允许用户通过：

$$\boxed{\text{anchor} + \text{parameters} + \text{maps / map_generator} + \text{predicate} + \text{quantifier}}$$

定义新关系，并可选择接入 balance / emission–absorption 证书。

RSL 的基本纪律是：

$$\boxed{\text{能写成新的读取，就不新增母体机制。}}$$

只有当既有读取原语无法表达一种关系时，才扩展关系语言；扩展只能增加读取能力，不能改写固定身份谱。

计算层首先运行任务预算预判。当前 Web 版将任务分为：

$$\boxed{\text{LIGHT | MODERATE | HEAVY / LOCAL RECOMMENDED | BLOCKED ON WEB.}}$$

稠密谱底层主要使用：

$$\text{spf:Int32Array}$$

和：

$$\text{prime:Uint8Array,}$$

裸数组内存约为：

$$\boxed{M_{\mathrm{raw}}(N) \approx 5(N+1)\ \text{bytes.}}$$

Web 端的工程硬阈值包括：

$$\boxed{N_{\mathrm{dense}}^{\mathrm{hard}} = 3 \times 10^{7},}$$

$$\boxed{A_{\mathrm{hard}} = 2 \times 10^{6},}$$

$$\boxed{A_{\mathrm{heavy}} = 5 \times 10^{5},}$$

$$\boxed{R_{\mathrm{DOM}} = 5000,}$$

以及浏览器版 Mersenne Lucas–Lehmer 指数：

$$\boxed{p \le 5000.}$$

JavaScript 普通整数精确边界为：

$$\boxed{2^{53} - 1 = 9\,007\,199\,254\,740\,991.}$$

超过这一边界的整数恒等、整除与取模必须进入：

$$\boxed{\text{BigInt}}$$

或本地任意精度整数引擎。

高性能实现采用分层后端：

$$\boxed{\text{Web JS} \rightarrow \text{Web Worker / Wasm} \rightarrow \text{Local CPU} \rightarrow \text{Local CPU + GPU.}}$$

本地版本的核心不再使用从 0 到 N 的单体稠密数组，而采用：

$$\boxed{\text{segmented sieve + segment streaming.}}$$

因此：

$$\boxed{\text{坐标大小} \neq \text{窗口宽度.}}$$

一个位于 10^{18} 附近的窄窗口，不需要构造 $[0,10^{18}]$ 的完整谱。

本篇还建立 RenSpectrum 的验证等级，使机器输出与数学层级一一对应：

$$\boxed{V_0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_5.}$$

分别表示：

- 语法可执行；
- 身份读取可复核；
- 有限关系读取可复核；
- 有限终端证书成立；
- 结构批量证书成立；
- 与目标量词匹配的全局闭合成立。

验证等级不是软件免责声明，而是数学对象层级的直接编码。

本篇最后给出完整参数词典与复现实验协议，使每一条关系读取都能够保存：

$$\boxed{\text{关系定义} + \text{参数} + \text{有限视界} + \text{控制深度} + \text{后端} + \text{软件版本} + \text{证书} + \text{输出摘要}.}$$

RenSpectrum 由此成为一个开放关系解释器。

它不是把素数问题封装成少数按钮，而是把全书形成的关系语言交给读者继续使用。

关键词： RenSpectrum；任谱；RPRS；固定谱解释器；形式证明接口；RSL；关系编译；无限性接口；接缝；吐出—吸收；BigInt；segmented sieve；WebAssembly；WebGPU；验证等级；复现实验；开放共同入口

第一部　名称、定位与执行边界

第一章　RenSpectrum：名称的完整含义

本书的可执行系统命名为：

RenSpectrum

中文简称：

任谱

完整中文名称：

任谱 · 统一素数关系工作台

英文工作台名称：

RenSpectrum · Unified Prime-Relation Workbench

正式英文名称：

Ren Prime-Relation Spectrum (RPRS):

A Fixed-Spectrum Interpreter for Prime and Arithmetic Relations

这里有三层含义。

1.1　Ren

“Ren”与中文姓氏“任”及“任谱”的“任”相对应。

它使软件名称具有明确的识别性，同时保留中文名称的自然对应。

1.2　Spectrum

“Spectrum”并不是把素数理解成物理频谱。

它在这里指：

固定算术身份谱

以及：

由同一固定身份谱导出的关系谱.

每一个整数的位置身份已经固定；

不同关系只是改变：

$$f_i, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{Q}.$$

因此：

$$\boxed{\text{谱固定，读法开放。}} \tag{1.1}$$

1.3 Prime-Relation

“Prime-Relation”强调 RenSpectrum 不是单纯 prime table。

它的基本对象不是一列：

$$2,3,5,7,\ldots$$

而是：

$$\boxed{\text{位置身份} + \text{位置之间的关系.}}$$

所以其核心单位是：

$$\mathfrak{R}_{\Theta,x},$$

而不是单个 prime flag。

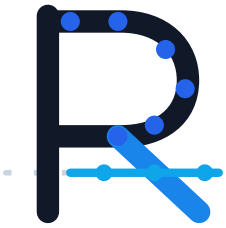
1.4 Workbench

“Workbench”表示它是一个工作台：

- 输入关系；
- 编译关系；
- 读取固定谱；
- 展开逐项实例；
- 检查局部阻塞；
- 计算有限证书；
- 比较量词类型；
- 复现实验。

因此它既不是静态数据库，也不是只提供单一按钮的计算器。

第二章　视觉标识也是关系语言的一部分



RenSpectrum 的网页标识采用一个抽象的 “R” 形骨架，并叠加离散谱点与水平关系线。

其视觉语法可以读成：

R 形主体 + 离散谱点 + 关系连线.

它对应三个层次：

- 固定身份谱；
- 关系方向；
- 关系读出。

网页同时提供：

中文 / English

以及：

浅色 / 深色 / 系统

三种主题选择。

主题只改变视觉呈现，不改变任何关系定义、参数、计算或证书。

因此：

表示层可以改变；　　数学语义保持不变。 (2.1)

第三章　软件不是证明来源，而是证明语义的执行环境

一个数学命题成立，来源于：

$$\boxed{\text{定义} + \text{定理} + \text{证明.}}$$

软件执行：

$$\boxed{\text{有限输入} \to \text{有限计算} \to \text{有限输出.}}$$

二者的正确关系是：

$$\boxed{\text{理论定义计算对象} \to \text{软件执行对象} \to \text{输出接受数学判据解释.}} \tag{3.1}$$

例如：

$$e_H^{\mathrm{struct}} > 0$$

能够推出：

$$T_H \geq 1,$$

不是因为网页显示绿色状态，而是因为第五篇已经证明：

$$T_H \geq e_H^{\mathrm{struct}}.$$

网页只是计算并展示该证书。

所以：

程序可以验证一个已经定义的有限证书； 证书的数学效力来自其定理。

(3.2)

第四章　RenSpectrum 的七个执行层

网页工作台分成七个主要区域：

0. 任务规模 / 设备能力预判
1. 快速关系读取
2. 无限性 / 全称性接口
3. 接缝 / 循环 / 可持续性
4. 逐原子 / 逐项关系谱
5. 局部阻塞 + 吐出—吸收
6. 内置关系类型总表
7. RSL 高级扩展.

(4.1)

编号 0 表示：

> 在计算以前先判断任务是什么、需要多少资源、应当由哪个后端执行。

这与本书“先确定对象，再选择方法”的纪律一致。

图 7-01　RenSpectrum 七个执行层

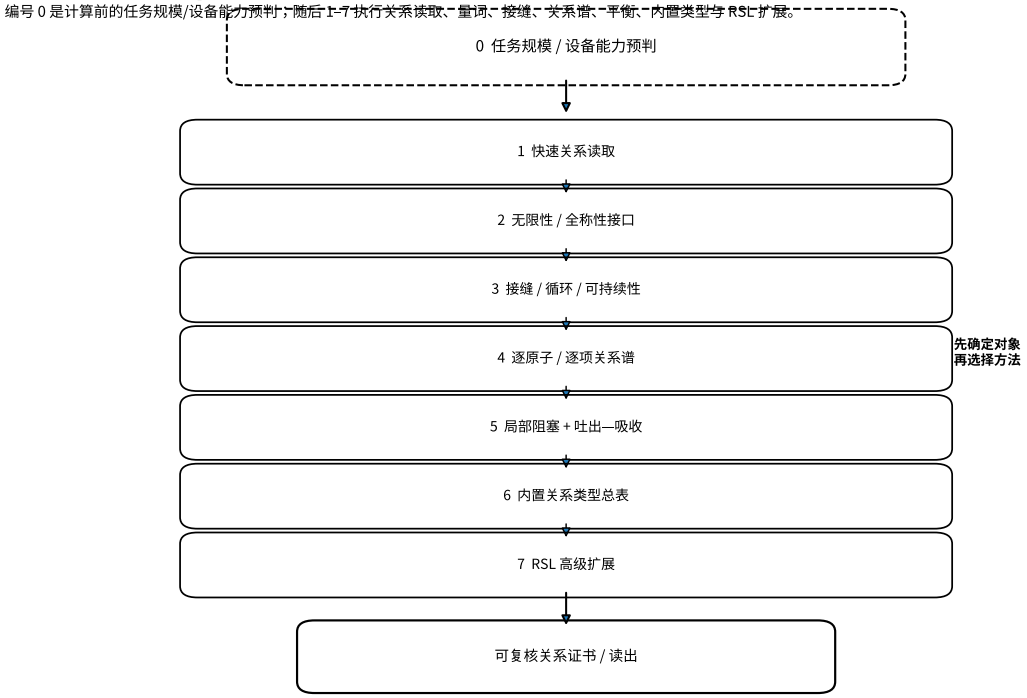


图 7-01　RenSpectrum 七个执行层。 编号 0 是计算前的任务规模与设备能力预判；随后 1–7 依次处理快速关系读取、无限性/全称性接口、接缝与可持续性、逐项关系谱、局部阻塞与吐出—吸收、内置关系类型以及 RSL 高级扩展。

第二部　快速关系读取

第五章　快速读取的统一编译式

任意内置关系首先编译为：

$$\boxed{R_\Theta(x) = \mathcal{B}_\Theta(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \dots, \boldsymbol{I}(f_r(x;\Theta)))}. \tag{5.1}$$

再附加：

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\Theta,x}\cdot}$$

工作台显示的“关系规范形”，就是这一结构的可视化。

因此快速读取不是为每个猜想写一段彼此独立的代码。

它遵循同一个编译入口：

$$\boxed{\text{关系类型} \to \text{参数} \to \text{位置映射} \to \text{身份读取} \to \text{局部谓词} \to \text{量词}.} \tag{5.2}$$

第六章　anchor：关系实例的自由位置

RenSpectrum 用：

anchor

表示一个关系实例的自由变量。

例如：

Goldbach

$$x = p.$$

Twin

$$x = p.$$

Prime tuple

$$x = n.$$

Green–Tao 固定切片

$$x = a.$$

Bunyakovsky

$$x = n.$$

anchor 不等于关系本身。

它只是：

在固定参数下选择一个具体关系实例的自由坐标.

第七章　快速读取的输入字段

快速关系读取统一接受以下输入。

7.1　关系类型

决定：

$$f_i,\quad \mathcal{B},\quad Q.$$

7.2　参数 1 / 参数 2 / 参数 3

不同关系使用不同参数。

例如：

- Goldbach：N；
- fixed gap：d；
- affine：A, B；
- Green–Tao：k, d；
- Erdős–Woods：x, y, k。

7.3　读取视界

读取视界限制当前有限执行区域。

它不改变全局命题，只规定当前执行器实际展开多少实例。

7.4　控制深度 z

提供两种方式：

$$\boxed{\text{自动：}\sqrt{\text{当前最大关系坐标}}}$$

或：

$$\boxed{\text{手动 } z.}$$

自动模式用于完整有限素性认证；

手动模式用于观察某个有限控制层下的中间结构。

7.5　显示过滤

逐项结果可以选择：

全部 | 只看命中 | 只看未命中.

过滤只改变显示，不改变内部统计。

图 7-02　快速读取统一编译式

所有内置关系共享同一个编译入口：关系类型和参数先变成位置映射，再经过固定身份读取、局部谓词与量词模块。

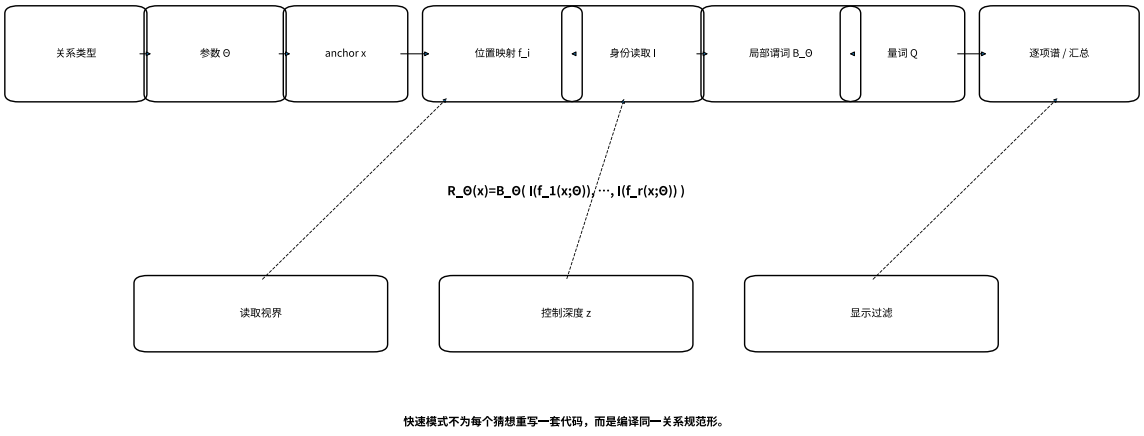


图 7-02　快速读取统一编译式。 RenSpectrum 的快速读取把内置关系统一编译为 $R_\Theta(x) = \mathcal{B}_\Theta(\boldsymbol{I}(f_1(x;\Theta)), \dots, \boldsymbol{I}(f_r(x;\Theta)))$，再附加外层量词 $\mathcal{Q}_{\Theta,x}$。执行输入由关系类型、参数、anchor、位置映射、固定身份、局部谓词和量词组成；读取视界、控制深度 z 与显示过滤负责有限执行而不改变全局命题。

第八章　逐项关系谱

一次快速读取可以产生许多关系实例。

每一行至少保存：

$$\boxed{\text{anchor} + \text{位置 / 镜像} + \text{身份} + \text{局部信息} + \text{结果.}} \tag{8.1}$$

身份使用：

$$\boxed{A}$$

表示原子，

$$\boxed{\mathcal{M}_q}$$

表示最小素因子为 q 的乘法身份，

以及：

$$\boxed{\partial}$$

表示关系位置没有进入合法正整数身份域。

因此逐项谱并不是只显示：

$$\text{HIT / MISS.}$$

它把失败原因也保留下来。

第九章　固定和与加权反射

Goldbach 内置关系：

$$\boxed{p \mapsto N - p.}$$

局部读数：

$$\alpha(p)\alpha(N-p).$$

量词：

$$\text{UNIVERSAL_FIBER.}$$

Lemoine / Lévy 使用：

$$\boxed{q = \frac{N-p}{2}.}$$

它是加权反射。

两者都属于逐目标 fiber，但位置映射不同。

第十章　固定差与连续固定差

Twin：

$$\boxed{p \mapsto p+2.}$$

一般固定差：

$$\boxed{p \mapsto p+d.}$$

二者只要求两端为原子。

Polignac 型连续 prime gap 还要求：

$$\boxed{(p, p+d) \text{ 的开区间中没有其他素数.}}$$

因此工作台把：

$$\boxed{\text{fixed difference}}$$

与：

$$\boxed{\text{consecutive fixed gap}}$$

严格分开。

第十一章　仿射关系

Sophie Germain：

$$\boxed{p \mapsto 2p + 1.}$$

一般仿射：

$$\boxed{p \mapsto Ap + B.}$$

工作台不需要为每一组 A, B 增加新的关系类型。

它们共享同一仿射读取器。

第十二章　固定偏移模板与阻塞样例

Prime tuple 使用：

$$\boxed{n \mapsto n + H.}$$

例如：

$$H = \{0,2,6,8\}.$$

工作台同时内置：

$$\boxed{H = \{0,2,4\}}$$

作为局部完全阻塞样例。

因为模 3：

$$0,2,1$$

覆盖全部余类。

因此这一关系可以直接在局部阻塞层关闭其长期全原子回归。

这一样例也是系统回归测试中的重要基准。

第十三章　Green–Tao 固定切片

给定：

$$k,\quad d,$$

生成：

$$\boxed{H(k,d)=\{0,d,\dots,(k-1)d\}.}$$

当前工作台读取的是一个固定：

$$(k,d)$$

切片。

其全局量词类型显示为：

$$\boxed{\text{ARBITRARILY_LONG.}}$$

这提醒使用者：

> 当前有限切片命中与“任意长度”是两个不同层级。

第十四章　窗口关系

14.1　Legendre

窗口：

$$(n^2, (n+1)^2).$$

读数：

窗口是否至少含一个原子.

14.2　Oppermann

两个窗口：

$$(n(n-1), n^2),$$

$$(n^2, n(n+1)).$$

要求两边都非空。

14.3　Brocard

连续素数：

$$p_n, p_{n+1}$$

的平方之间读取：

$$\pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2).$$

局部谓词：

$$\geq 4.$$

这些关系共同说明：

窗口是第一等关系对象。

第十五章　相邻素数指标

Andrica 读取：

$$\boxed{\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}<1.}$$

Firoozbakht 采用数值更稳定的对数形式：

$$\boxed{\frac{\log p_{n+1}}{n+1}<\frac{\log p_n}{n}.}$$

它们的 anchor 是素数索引 n，而不是整数位置本身。

第十六章　指数与多项式拉回

16.1　Mersenne

$$\boxed{p \mapsto 2^p - 1.}$$

使用 BigInt 与 Lucas–Lehmer 型素性读取。

16.2　$n^2 + 1$

$$\boxed{n \mapsto n^2 + 1.}$$

16.3　Bunyakovsky

输入多项式表达式：

$$\boxed{f(n).}$$

工作台读取：

$$\alpha(f(n)).$$

16.4　Schinzel H

输入多项式束：

$$f_1(n), \dots, f_k(n).$$

读取：

$$\prod_i \alpha\left(f_i(n)\right).$$

并可附加多项式束的局部阻塞检查。

第十七章　完整因子身份关系

17.1　Grimm

连续合数块读取每个位置的：

$$\mathrm{PF}(n).$$

再构造素因子匹配。

这要求：

$$\boxed{\text{factor-set engine} + \text{matching engine.}}$$

17.2　Erdős–Woods

比较两个整数块：

$$x, x+1, \dots, x+k,$$

$$y, y+1, \dots, y+k$$

在每个位置的：

$$\mathrm{PF}$$

是否一致。

量词接口：

$$\boxed{\mathrm{BLOCK_SEPARATION.}}$$

因此 RenSpectrum 的固定谱不是只有一个 prime bit。

它也可以读取完整因子身份。

第十八章　三类混合关系示例

工作台保留三种开放关系示例，用来说明关系语言可以自由组合已有读取原语。

18.1　交叉镜像关系

$$\boxed{p,\quad p+2,\quad 2p+1}$$

同时为原子。

它混合：

- 平移；
- 仿射。

18.2　二次双原子关系

$$\boxed{n^2+n+41,\quad n^2+n+43}$$

同时为原子。

它是双多项式拉回。

18.3　反射—平移耦合

$$\boxed{p,\quad p+2,\quad N-p}$$

同时为原子。

它混合：

- 固定差；
- 固定和反射。

这三个例子不需要新的整数母体。

只需要组合既有位置映射。

图 7-03　anchor / maps / predicate / quantifier 数据模型

Goldbach、Twin 与 prime tuple 使用同一四字段模型；变化的是具体位置映射和量词。

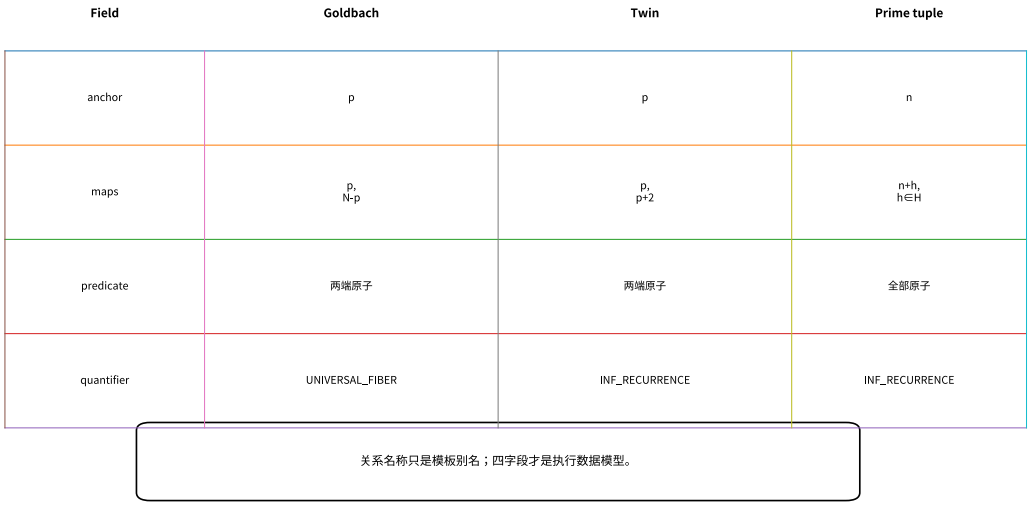


图 7-03　anchor / maps / predicate / quantifier 数据模型。 快速关系读取的核心数据模型可以压缩为四类字段：anchor 给出自由位置；maps 生成具体关系端点；predicate 检查这些位置的固定身份及附加局部条件；quantifier 规定全局读取。Goldbach、Twin 与 prime tuple 因此共享同一执行结构，只在位置映射、局部谓词或量词参数上变化。

第三部　无限性与全称性模块

第十九章　软件首先识别量词类型

RenSpectrum 不把一个有限命中数误当成全局结论。

它先识别关系的量词类型，再显示与之匹配的判据。

这对应第五篇建立的量词结构。

第二十章　INF_RECURRENCE

无限回归使用：

$$\boxed{C(X) = \sum_{x \le X} R\,(x).}$$

全局判据：

$$\boxed{C(X) \text{ 无界.}}$$

当前网页只显示当前视界中的：

$$\boxed{C_{\text{current}}.}$$

它是累计序列的一个有限截面。

适用：

- Twin；
- fixed gap；
- Sophie Germain；
- prime tuple；
- $n^2 + 1$；
- Bunyakovsky；
- Schinzel H；
- Mersenne。

第二十一章　UNIVERSAL_FIBER

形式：

$$\boxed{\forall\theta\ \exists x.}$$

当前页面显示某个固定参数 fiber 的命中数：

$$\boxed{C(\theta).}$$

全局判据是：

$$\boxed{C(\theta) > 0 \quad \forall\theta.}$$

适用：

- Goldbach；
- Lemoine / Lévy；
- 反射—平移耦合型全称 fiber。

第二十二章　WINDOW_UNIVERSAL

当前有限读取显示：

$$\boxed{\text{非空窗口数/总窗口数.}}$$

全局判据：

$$\boxed{W(n) \geq 1 \quad \forall n.}$$

典型实例：

- Legendre。

第二十三章　UNIVERSAL_PREDICATE

形式：

$$\boxed{\forall n,\quad P(n).}$$

当前工作台显示：

$$\boxed{\text{通过数/总读取数.}}$$

典型实例：

- Oppermann；
- Brocard；
- Andrica；
- Firoozbakht；
- Grimm。

第二十四章　ARBITRARILY_LONG

形式：

$$\boxed{\forall k\ \exists \text{ 长度 } k \text{ 的关系.}}$$

全局判据：

$$\boxed{L(X) \text{ 无界.}}$$

当前 Green–Tao 固定切片只读取固定：

$$(k, d).$$

工作台因此把：

$$\boxed{\text{固定切片命中}}$$

与：

$$\boxed{\text{最大已实现长度无界}}$$

分开显示。

第二十五章　PARAMETER_INFINITE

这一接口关注：

$$\boxed{\text{成功参数 fiber 的数量.}}$$

若：

$$P(X)$$

无界，则成功参数无限。

它适用于：

> 参数本身要求无限，而每个成功参数只需要有限 witness 的问题。

第二十六章　BLOCK_SEPARATION

对两个因子身份块：

$$B_K(x),\quad B_K(y),$$

当前读取显示：

- 是否仍完全相同；
- 在什么长度内已经分离。

全局目标是寻找统一有限：

$$\boxed{K_*}$$

这一接口与无限回归完全不同。

图 7-04　无限性与全称性模块选择器

先识别外层量词，再选择对应有限量与全局判据；用总线式连接避免跨节点斜线。

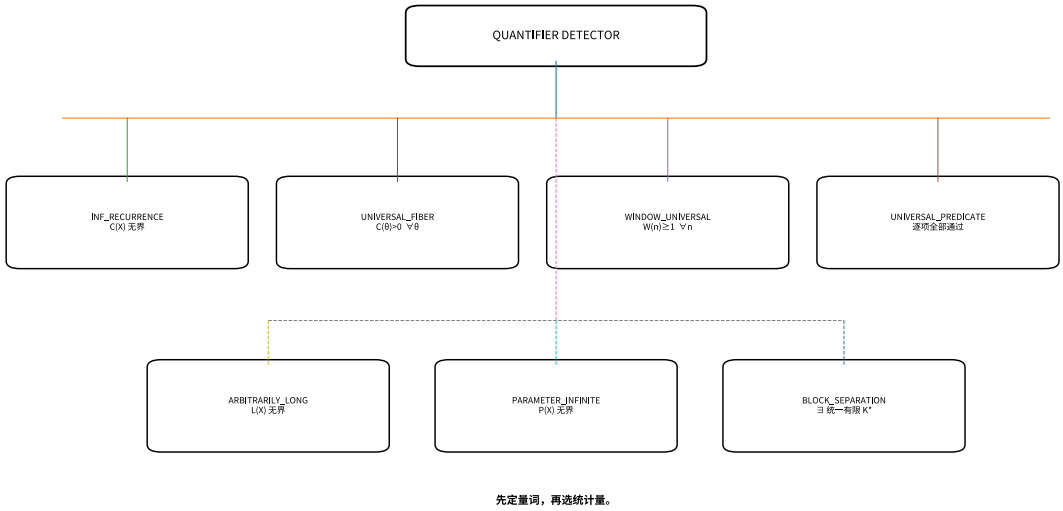


图 7-04　无限性与全称性模块选择器。 RenSpectrum 先识别外层量词，再选择对应的有限统计量与全局判据：INF_RECURRENCE 读取无界 $C(X)$；UNIVERSAL_FIBER 要求 $C(\theta) > 0$ 对全部参数成立；WINDOW_UNIVERSAL 要求每个窗口 $W(n) \geq 1$；UNIVERSAL_PREDICATE 要求逐项谓词全部通过；ARBITRARILY_LONG 与 PARAMETER_INFINITE 分别读取无界 $L(X)$ 与 $P(X)$；BLOCK_SEPARATION 寻找统一有限分离长度 K_*。

第四部　接缝、循环与持续性

第二十七章　三类接缝的可执行定义

网页同时显示三种接缝。

27.1　生成接缝

$$\boxed{s^{2}.}$$

它是下一控制原子 s 第一次能够进入新的最小素因子判定的位置。

它回答：

$$\boxed{\text{什么时候控制层换代？}}$$

27.2　相位接缝

固定控制深度 z，令：

$$\boxed{W_z = \prod_{\substack{q \le z \\ q \text{ 奇素数}}} q\,.}$$

它是有限控制层共同余类相位的回返点。

它回答：

$$\boxed{\text{什么时候回到同相位？}}$$

27.3　平方接缝族

全部素数平方：

$$\boxed{r^{2}.}$$

形成关系窗口的边界族。

它用于：

- 关系分段；
- 跨缝统计；
- 持续性扫描；
- 平方窗口证书。

第二十八章　有限循环 S_0 与全局持续 S_∞

当控制素数集冻结时，有限模相位严格回返。

记为：

$$\boxed{S_0.}$$

当控制层持续增长时，模数本身也增长。

此时全局问题进入：

$$\boxed{S_\infty.}$$

所以：

$$\boxed{\text{有限相位循环不等于无限关系循环。}} \tag{28.1}$$

RenSpectrum 把二者分开显示。

第二十九章　平方接缝闭合扫描

接缝扫描至少记录：

$$\boxed{\text{控制 prime} + r^2 + \text{成功关系跨缝数} + \text{判定.}} \tag{29.1}$$

其目的不是单独把“跨缝”变成新命题。

它提供：

$$\boxed{\text{关系在连续有限窗口中的持久履历.}}$$

第三十章　平方窗口持续读数

对每一个平方窗口，系统记录：

$$\boxed{\text{窗口} + \text{命中数} + \text{状态}.}$$

这一序列与第五篇的持续非灭绝型关系筛直接对应。

当关系属于：

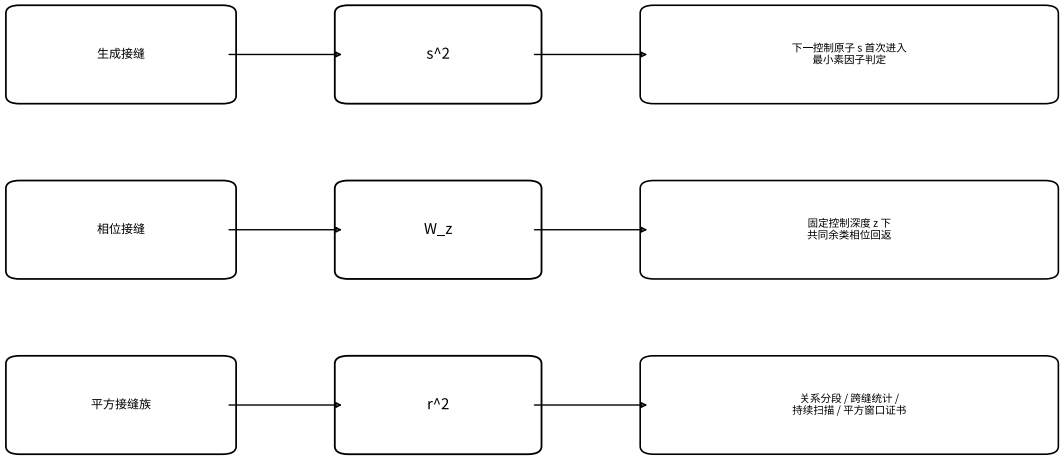
INF_RECURRENCE,

真正的全局判据来自命中数累计是否无界。

第五部　局部阻塞与吐出—吸收执行器

图 7-05　三类接缝执行图

生成接缝回答控制层何时换代；相位接缝回答何时回到同相位；平方接缝族负责关系窗口分段与持续性扫描。



三个边界回答三个不同问题，执行时不能互相替代。

图 7-05　三类接缝执行图。 RenSpectrum 同时区分三种接缝：生成接缝 s^2 表示下一控制原子 s 首次能够进入新的最小素因子判定；相位接缝 $W_z = \prod_{q \le z,\, q \text{ odd prime}} q$ 表示固定控制深度下共同余类相位的回返；平方接缝族 r^2 用于关系分段、跨缝统计、持续性扫描与平方窗口证书。三者回答的问题不同，执行时不能互相替代。

第三十一章　模板 H 的规范化

当关系可以写成固定偏移模板：

$$\boxed{H = \{h_1, \dots, h_k\},}$$

系统自动启用模板模块。

首先规范化：

1. 去重；
2. 排序；
3. 整体平移使最小偏移为 0。

因此：

$$\boxed{H \sim H - c.}$$

整体平移不改变模板的内部差值结构。

第三十二章　局部阻塞指纹

对每个素数 q，计算：

$$\boxed{\nu_H(q) = \#\{h \bmod q : h \in H\}.}$$

以及：

$$\boxed{\nu_H(q) = q - \nu_H(q).}$$

若：

$$\nu_H(q) = q,$$

则模板被 q 完全局部覆盖。

网页直接显示：

$$\boxed{\text{NO INFINITE RECURRENCE}}$$

作为模板级局部结论，并停止无意义的 $B/U/e$ 计算。

这不是启发式停止。

它对应第四篇的局部阻塞定理。

第三十三章　模板 admissible 状态

若没有局部完全覆盖，网页显示：

ADMISSIBLE.

它的严格含义是：

局部谱允许长期全原子关系.

它不等于：

已经产生无限全原子关系.

因此 admissible 模板继续进入供给—吸收模块。

第三十四章　B_H：关系吐出

在平方视界：

$$(r^2, s^2),$$

定义：

$$\boxed{B_H(r,s)}$$

为全部旧历史层已经幸存的完整模板数。

“吐出”表示：

旧关系母体在当前有限视界中提供了多少完整候选关系.

它不是单点 survivor 数。

第三十五章　$\boldsymbol{U}$：吸收资源

定义：

$$\boxed{U(r,s)=\left\{u\in\mathbb{P}:s\le u<\frac{s^2}{r}\right\}.}$$

它记录当前最后控制素数 r 可以通过：

$$ru$$

形成真实死亡的有限余因子资源。

第三十六章　Q 与 $\mu_H(Q)$

用户可选择有限 wheel：

$$Q.$$

定义：

$$M_Q = \prod_{q \in Q} q.$$

系统枚举单位余类：

$$c \in (\mathbb{Z}/M_Q\mathbb{Z})^\times$$

并计算：

$$J_H(c; Q).$$

最大值：

$$\boxed{\mu_H(Q) = \max_c |J_H(c; Q)|}$$

表示：

一个资源最多能够通过多少模板角色重复承担吸收.

第三十七章　两种吸收容量

固定谱资源容量：

$$\boxed{C_H^{\mathrm{exact}} = \mu_H(Q)|U|.}$$

结构容量：

$$\boxed{C_H^{\mathrm{struct}} = \mu_H(Q)(\Delta - 1),}$$

其中：

$$\Delta = s - r.$$

前者使用当前固定谱中真实存在的资源数；

后者只使用结构上界。

第三十八章　两种净关系势

定义：

$$\boxed{e_H^{\mathrm{exact}} = B_H - C_H^{\mathrm{exact}},}$$

$$\boxed{e_H^{\mathrm{struct}} = B_H - C_H^{\mathrm{struct}}.}$$

由第五篇定理：

$$\boxed{T_H \geq e_H^{\mathrm{exact}} \geq e_H^{\mathrm{struct}}.}$$

因此网页可以逐窗标记：

- fixed-spectrum resource certificate；
- structural certificate。

第三十九章　T_H 与 D_H

真实全原子关系数：

$$\boxed{T_H.}$$

真实死亡数：

$$\boxed{D_H = B_H - T_H.}$$

因此每一行完整保存：

$$\boxed{p,\ r,\ s,\ \Delta,\ B_H,\ U,\ \mu_H, C_{\text{exact}}, C_{\text{struct}}, e_{\text{exact}}, e_{\text{struct}}, T_H, D_H.} \tag{39.1}$$

这正是第五篇供给—吸收账本的可执行形式。

第四十章　哪些关系自动进入 balance 模块

固定偏移结构可直接接入：

- Twin；
- fixed gap；
- Polignac 的端点模板；
- prime tuple；
- Green–Tao 固定 (k,d) 切片；
- RSL 定义的固定偏移关系。

不具有固定偏移模板的关系显示：

不适用.

“不可用”不是程序缺陷，而是说明该关系需要另一种有限控制几何。

图 7-06　吐出—吸收执行器

固定偏移模板先做规范化与局部许可，再逐平方视界计算供给、资源、复用、容量、净势及真实/死亡关系账本。

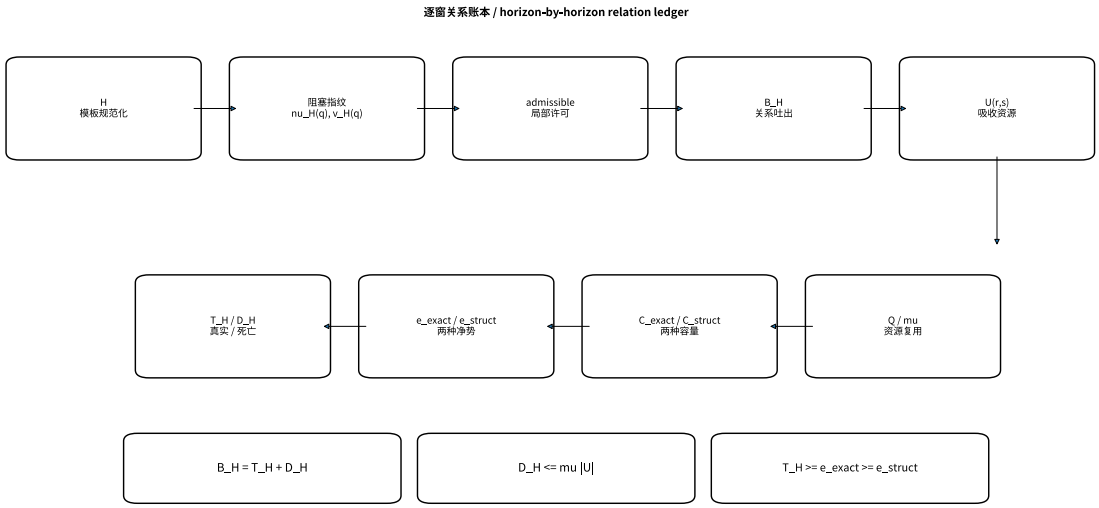


图 7-06　吐出—吸收执行器。 固定偏移模板进入 balance 模块后，软件依次保存模板 H、局部阻塞指纹与 admissible 状态、平方视界中的关系供给 B_H、吸收资源 $U(r,s)$、wheel Q 与复用度 $\mu_H(Q)$、精确/结构容量、精确/结构净势，以及真实关系 T_H 与真实死亡 D_H。每个窗口还必须满足 $B_H = T_H + D_H$、$D_H \le \mu_H(Q)|U|$ 和 $T_H \ge e_H^{\mathrm{exact}} \ge e_H^{\mathrm{struct}}$。

第六部　RSL：开放关系语言

第四十一章　RSL 的名称与目的

RSL 是：

Relation Specification Language

即：

关系规范语言.

它把第三篇建立的关系规范形变成可执行描述。

RSL 的目标不是创造新的算术身份。

它只描述：

去哪里读 + 怎样组合 + 用什么量词解释.

因此：

预置目录不是理论边界；　RSL 才是关系接口。　(41.1)

第四十二章　RSL 的母子纪律

RSL 必须服从：

$$\boxed{\text{母体决定子读出；　　子读出不得反向修改母体。}} \tag{42.1}$$

所以一个新关系首先尝试写成：

$$\boxed{\text{maps / map_generator + predicate + quantifier.}}$$

若能够表达：

$$\boxed{\text{就不新增母体机制。}} \tag{42.2}$$

只有当读取原语本身无法表达某种关系时，才扩展 RSL。

扩展只能增加：

$$\boxed{\text{读取能力.}}$$

不能改变：

$$\boxed{\boldsymbol{I}(n).}$$

第四十三章　RSL 的基本结构

一个 RSL 对象包含：

```
{
  "name": "...",
  "anchor": {
    "var": "...",
    "domain": "...",
    "start": 0,
    "end": 100
  },
  "parameters": {},
  "maps": [],
  "predicate": {},
  "quantifier": {}
}
```

或使用：

```
{
  "map_generator": {}
}
```

生成可变长度位置束。

第四十四章　anchor 字段

anchor 至少包含：

var,	domain,	start,	end.

domain 可以是：

integer,	prime,	odd,	even.

例如：

```
"anchor": {
  "var": "p",
  "domain": "prime",
  "start": 2,
  "end": 1000
}
```

第四十五章　parameters 字段

参数是固定关系族中的外部常量。

例如 Twin：

```
"parameters": {
  "d": 2
}
```

Goldbach：

```
"parameters": {
  "N": 100
}
```

Green–Tao 固定切片：

```
"parameters": {
  "k": 5,
  "d": 30
}
```

第四十六章　maps

固定长度关系使用：

```
"maps": [
  {"id": "x0", "expr": "p"},
  {"id": "x1", "expr": "p+d"}
]
```

数学上：

$$\boxed{x_i = f_i(\text{anchor}; \Theta).}$$

表达式支持整数算术组合，例如：

$$+,\ -,\ *,\ /,\ \cdot$$

所有关系位置最终都必须落入可读取的整数身份域。

第四十七章　map_generator

长度由参数决定的关系使用：

```
"map_generator": {
  "id_prefix": "x",
  "index": "j",
  "from": 0,
  "to": "k-1",
  "expr": "a+j*d"
}
```

它生成：

$$a,\ a+d,\ \dots,\ a+(k-1)d.$$

因此 Green–Tao 型关系不需要手写：

$$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}.$$

第四十八章　predicate

局部谓词决定这些位置怎样组合。

基本谓词包括：

all_prime

is_prime

any_prime

no_prime_between

以及逻辑：

and,　or,　not.

生成束还可以使用：

all_generated_prime.

第四十九章　quantifier

quantifier 明确区分：

INF_RECURRENCE,

UNIVERSAL_FIBER,

WINDOW_UNIVERSAL,

ARBITRARILY_LONG,

PARAMETER_INFINITE,

UNIVERSAL_PREDICATE,

BLOCK_SEPARATION.

所以 RSL 不只描述局部关系。

它把：

关系

与：

命题

分成两个层次。

第五十章　Twin 的 RSL 表达

```
{
  "name": "Twin",
  "anchor": {
    "var": "p",
    "domain": "prime",
    "start": 2,
    "end": 1000
  },
  "parameters": {
    "d": 2
  },
  "maps": [
    {"id": "x0", "expr": "p"},
    {"id": "x1", "expr": "p+d"}
  ],
  "predicate": {
    "op": "all_prime",
    "args": ["x0", "x1"]
  },
  "quantifier": {
    "type": "INF_RECURRENCE"
  }
}
```

这段代码完整对应：

$$p,\ p+2 \in \mathbb{P},$$

以及：

$$\exists^{\infty} p.$$

第五十一章　Goldbach 的 RSL 表达

```
{
  "name": "Goldbach N=100",
  "anchor": {
    "var": "p",
    "domain": "prime",
    "start": 2,
    "end": 50
  },
  "parameters": {
    "N": 100
  },
  "maps": [
    {"id": "x0", "expr": "p"},
    {"id": "x1", "expr": "N-p"}
  ],
  "predicate": {
    "op": "all_prime",
    "args": ["x0", "x1"]
  },
  "quantifier": {
    "type": "UNIVERSAL_FIBER"
  }
}
```

这里当前 RSL 对象描述的是：

$$N = 100$$

这一条 fiber。

全局命题由量词层解释为：

$$\forall N.$$

第五十二章　Polignac 的 RSL 表达

```
{
  "name": "Polignac d=6",
  "anchor": {
    "var": "p",
    "domain": "prime",
    "start": 2,
    "end": 1500
  },
  "parameters": {
    "d": 6
  },
  "maps": [
    {"id": "x0", "expr": "p"},
    {"id": "x1", "expr": "p+d"}
  ],
  "predicate": {
    "op": "and",
    "args": [
      {
        "op": "all_prime",
        "args": ["x0", "x1"]
      },
      {
        "op": "no_prime_between",
        "lo": "x0",
        "hi": "x1"
      }
    ]
  },
  "quantifier": {
    "type": "INF_RECURRENCE"
  }
}
```

这显示 RSL 可以组合：

端点身份 + 区间空读.

第五十三章　Green–Tao 固定切片的 RSL 表达

```
{
  "name": "Green-Tao fixed slice",
  "anchor": {
    "var": "a",
    "domain": "integer",
    "start": 2,
    "end": 3000
  },
  "parameters": {
    "k": 5,
    "d": 30
  },
  "map_generator": {
    "id_prefix": "x",
    "index": "j",
    "from": 0,
    "to": "k-1",
    "expr": "a+j*d"
  },
  "predicate": {
    "op": "all_generated_prime"
  },
  "quantifier": {
    "type": "ARBITRARILY_LONG"
  }
}
```

这说明：

可变长度关系是语言层对象，而不是新的母体对象。

第五十四章　混合多项式关系

一个开放示例：

```
{
  "name": "Mixed polynomial",
  "anchor": {
    "var": "n",
    "domain": "integer",
    "start": 1,
    "end": 300
  },
  "parameters": {},
  "maps": [
    {"id": "x0", "expr": "n"},
    {"id": "x1", "expr": "n^2+n+41"}
  ],
  "predicate": {
    "op": "all_prime",
    "args": ["x0", "x1"]
  },
  "quantifier": {
    "type": "INF_RECURRENCE"
  }
}
```

它展示：

线性位置 + 二次位置

可以属于同一个关系对象。

图 7-07　RSL 语法树

RSL 由六个主字段组成；子字段直接收纳在各节点内部，避免扁出连线穿过文本。

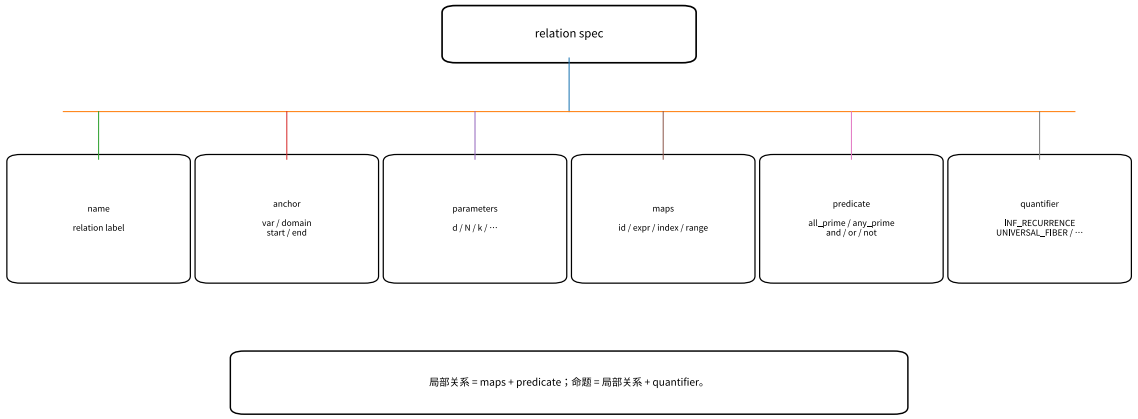


图 7-07　RSL 语法树。 一个 RSL 对象由 `name`、`anchor`、`parameters`、`maps` 或 `map_generator`、`predicate` 与 `quantifier` 等字段构成。`anchor` 保存自由变量与有限 domain；`parameters` 保存固定关系参数；位置映射生成关系端点；`predicate` 在固定身份上组合局部关系；`quantifier` 则把局部关系提升为命题。关系名称只是可读标签，真正的执行语义落在这些结构字段中。

第五十五章　RSL 编译管线

RSL 执行顺序为：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{解析 JSON}\\ \Downarrow\\ \text{检查 anchor / parameters}\\ \Downarrow\\ \text{编译 maps / generator}\\ \Downarrow\\ \text{估计最大读取坐标}\\ \Downarrow\\ \text{构造固定谱}\\ \Downarrow\\ \text{逐 anchor 读取身份}\\ \Downarrow\\ \text{执行 predicate}\\ \Downarrow\\ \text{汇总 quantifier 的当前有限读数.}\end{array}} \tag{55.1}$$

输出至少包括：

$$\boxed{\text{relation name,}\quad \text{quantifier,}\quad \text{anchor domain,}\quad \text{hits,}\quad \text{max read.}}$$

逐项表保存：

$$\boxed{\text{anchor} + \text{位置身份} + \text{局部关系字.}}$$

55.1　形式证明链的可执行出口

第六篇已经把经典命题写成：

$$\boxed{\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}_{\Theta,x}[\mathcal{B}_{\Theta}(\boldsymbol{I}(f_1),\dots,\boldsymbol{I}(f_r))].}$$

RSL 直接承接右侧的关系标准形。

一个完整执行记录可以附带：

$$\boxed{\Pi_{\text{formal}} = (\text{proposition,maps,predicate,quantifier,certificate,verification}).} \tag{55.2}$$

其中：

- `proposition` 保存原命题；
- `maps` 保存位置映射；
- `predicate` 保存固定身份上的局部关系谓词；
- `quantifier` 保存全局量词；
- `certificate` 保存第五篇的有限或累计证书接口；
- `verification` 保存当前达到的 V_k 等级。

于是：

$$\boxed{\text{经典命题} \leftrightarrow \text{关系标准形} \to \text{RSL spec} \to \text{有限执行} \to \text{证书} \to \text{量词状态.}} \tag{55.3}$$

55.2 关系名称不是执行语义

菜单中的“Goldbach”“Twin”“Legendre”等名称只是可读标签。

真正决定执行的是：

$$\boxed{\text{maps} + \text{predicate} + \text{quantifier.}}$$

因此同一个经典命题既可以由预置界面执行，也可以由完全等价的 RSL 规范执行。

> **书中的形式证明与软件中的自定义关系使用同一数学语义。**

(55.4)

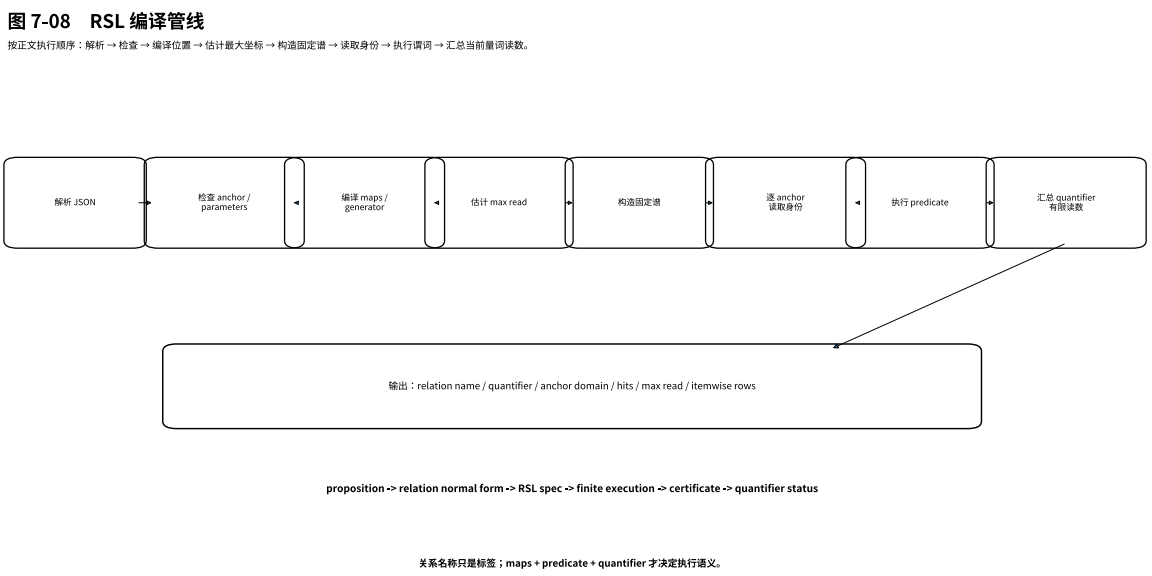


图 7-08 RSL 编译管线。 正文给出的 RSL 执行顺序为：解析 JSON，检查 `anchor / parameters`，编译 `maps / generator`，估计最大读取坐标，构造固定谱，逐 anchor 读取身份，执行 `predicate`，最后汇总 `quantifier` 的当前有限读数。完整记录还可附带 proposition、maps、predicate、quantifier、certificate 与 verification，从而形成“经典命题 → 关系标准形 → RSL spec → 有限执行 → 证书 → 量词状态”的出口链。

第五十六章　RSL 的开放原则

如果一个新关系能够写成：

$$\boxed{\text{位置映射} + \text{局部谓词} + \text{量词},}$$

那么它已经属于统一关系语言。

这给系统一个重要的开放纪律：

$$\boxed{\text{新问题优先增加关系定义，不优先增加母体机制。}} \tag{56.1}$$

因此软件不会被“猜想名称列表”封闭。

第七部　计算预算与执行后端

第五十七章　为什么必须先做计算预算

不同关系任务的计算形态完全不同：

$$\boxed{\text{稠密整段筛} \neq \text{高坐标窄窗口} \neq \text{BigInt 素性} \neq \text{因子集合} \neq \text{关系束批量计数}.} \tag{57.1}$$

因此 RenSpectrum 不使用一个单一“最大整数”描述能力。

它先估计：

- 最大关系坐标；
- anchor 数；
- 所需稠密谱内存；
- 任务类型；
- BigInt 是否介入；
- 当前设备能力；
- 推荐后端。

第五十八章　Web 稠密谱的内存模型

当前 Web 引擎的主要稠密数组为：

$$\text{spf:Int32Array},$$

每个整数：

$$4\ \text{bytes},$$

以及：

$$\text{prime:Uint8Array},$$

每个整数：

$$1\ \text{byte}.$$

所以裸数组约：

$$\boxed{M_{\text{raw}}(N) \approx 5(N+1)\ \text{bytes}.} \tag{58.1}$$

典型规模：

最大坐标 N	裸数组约占
10^6	5 MB
5×10^6	25 MB
10^7	50 MB
2×10^7	100 MB
3×10^7	150 MB
10^8	500 MB

此外还有：

- JS 对象；
- relation instances；
- 临时数组；
- DOM；
- 浏览器自身内存；
- 垃圾回收峰值。

所以：

$$\boxed{\text{裸数组大小不是实际内存上限。}} \tag{58.2}$$

第五十九章　四级任务风险

Web 端预判使用：

LIGHT

MODERATE

HEAVY / LOCAL RECOMMENDED

BLOCKED ON WEB.

它们分别表示：

- 网页直接适合；
- 可以运行但可能明显占用 UI；
- 更适合本地 CPU / Wasm；
- 当前 Web 路径不执行。

第六十章　Web 工程阈值

稠密谱硬上限：

$$\boxed{N_{\mathrm{dense}}^{\mathrm{hard}} = 3 \times 10^{7}.} \tag{60.1}$$

anchor 硬上限：

$$\boxed{A_{\mathrm{hard}} = 2 \times 10^{6}.} \tag{60.2}$$

重型 anchor 阈值：

$$\boxed{A_{\mathrm{heavy}} = 5 \times 10^{5}.} \tag{60.3}$$

DOM 最大逐行显示：

$$\boxed{R_{\mathrm{DOM}} = 5000.} \tag{60.4}$$

DOM 截断只影响显示。

完整有限视界的统计仍然使用全部计算结果。

第六十一章　自适应设备内存档位

若浏览器提供：

$$\text{navigator.deviceMemory},$$

系统使用粗档位调整推荐稠密谱规模：

浏览器可见内存档位	推荐 dense N
≤ 4 GB	6×10^6
≤ 8 GB	1.2×10^7
≤ 16 GB	2×10^7
> 16 GB	2.5×10^7
未知	10^7

这是一种执行预算档位。

它不把浏览器公开的粗内存字段当成设备总内存的精确测量。

第六十二章　CPU 线程与浏览器能力探测

预算面板显示：

navigator.hardwareConcurrency

得到的 CPU 逻辑线程数。

同时检测：

navigator.gpu

以及：

window.crossOriginIsolated.

后二者分别决定：

- WebGPU 是否可用；
- SharedArrayBuffer / Wasm 多线程条件是否具备。

第六十三章　JavaScript 整数边界

JavaScript `Number` 的最大安全整数：

$$\boxed{2^{53} - 1 = 9\,007\,199\,254\,740\,991.} \tag{63.1}$$

“能表示一个浮点数”和“能精确表示一个整数”是两件不同的事。

任何依赖：

$$=,\quad \bmod,\quad |$$

的精确算术，一旦超过这一边界，就必须切换：

$$\boxed{\text{BigInt}}$$

或任意精度本地整数库。

第六十四章　Mersenne 与 BigInt

Mersenne 读取：

$$2^p - 1.$$

其数值很快超过安全整数范围。

所以工作台直接进入 BigInt 路径。

浏览器版 Lucas–Lehmer 的当前指数硬阈值为：

$$\boxed{p \le 5000.} \tag{64.1}$$

这一阈值属于 Web 执行预算。

数学对象本身没有这一限制。

第六十五章　高坐标不等于大内存

一个关系坐标可能位于：

$$10^{18}$$

附近。

如果只读取窗口：

$$[10^{18}, 10^{18} + 10^{9}],$$

并不需要构造：

$$[0, 10^{18}]$$

的稠密谱。

因此 RenSpectrum 把：

$$\boxed{\text{coordinate magnitude}}$$

与：

$$\boxed{\text{window width}}$$

完全分开预算。

这是从 Web 稠密谱进入本地分段谱的关键。

第六十六章　segmented sieve

本地引擎采用：

segmented sieve.

把大区间分成：

$$I_1, I_2, \dots, I_m.$$

每次只在一个 segment 中保留必要的筛状态。

于是内存由：

$$O(N)$$

降低为：

$$O(\text{segment width})$$

量级。

再配合：

segment streaming,

关系读取可以边生成 prime / factor 信息，边送入关系编译器，而不必把整个大范围固定谱同时留在内存。

第六十七章　Web Worker

Web 页面中的重计算包括：

- sieve；
- factorization；
- relation scan；
- tuple count。

这些任务不应占用 UI 主线程。

因此 Web 高性能版的第一层是：

Web Worker.

界面负责：

- 输入；
- 状态；
- 可视化。

Worker 负责：

- 计算；
- 流式返回；
- 证书生成。

第六十八章　WebAssembly

数论核心可以由：

Rust / C++ → WebAssembly.

Wasm 的主要价值包括：

- 更接近原生 CPU；
- 更紧凑的数据结构；
- SIMD；
- 与 Desktop Core 共享算法；
- 更容易建立统一测试。

第六十九章　Wasm 多线程

Wasm pthread / SharedArrayBuffer 需要正式跨源隔离。

典型部署头：

```
Cross-Origin-Opener-Policy: same-origin
Cross-Origin-Embedder-Policy: require-corp
```

因此高性能 Web 版应运行在正式 HTTPS 服务中。

单文件 HTML 更适合：

- 分享；
- 教学；
- 中小规模关系读取。

第七十章　WebGPU 的准确位置

GPU 适合作为：

hybrid accelerator.

它特别适合：

大批量规则筛选

固定模板在大范围进行 residue elimination。

tuple counting

只需要计数，不要求把每一个 prime 传回 UI。

大规模独立 modular filters

大量候选同时接受同一组小素数条件。

第七十一章　GPU 不应承担所有任务

下列任务更自然地留在 CPU：

输出全部 prime

GPU 筛后还要 compact 和 GPU→CPU 传输。

任意精度 BigInt

消费级 GPU 不天然等价于高效通用大整数引擎。

Grimm / Erdős–Woods

因子集合长度可变，matching 分支复杂。

任意 RSL 表达式

用户表达式可能具有：

- 不规则分支；
- 序列依赖；
- BigInt；
- 稀疏输出。

因此：

$$\boxed{\text{GPU 做规则并行；　CPU 做复杂身份与最终认证。}} \tag{71.1}$$

第七十二章　RenSpectrum Desktop

本地版可采用：

```
UI
│
├── Desktop Web UI / Tauri
│
└── RenSpectrum Core
    │
    ├── Relation compiler / RSL
    ├── Prime engine
    ├── Segmented sieve
    ├── Big integer / primality
    ├── Factor-set engine
    ├── Balance / seam engine
    └── Scheduler
        ├── CPU backend
        └── GPU backend
```

最重要的不是具体 UI 框架。

真正必须共享的是：

同一个 relation model / RSL.

Web 与 Desktop 不能维护两套不同数学语义。

第七十三章　四级执行后端

定义：

Tier W

Web JS。

适合：

- 中小规模 dense read；
- 教学；
- 参数快速试算；
- 关系理解。

Tier WW

Web Worker + Wasm。

适合：

- 更大 dense / segmented scan；
- 多核 CPU；
- 流式关系输出。

Tier C

Local CPU。

使用优化 segmented sieve 后，64-bit 整数空间可以成为坐标接口。

这不意味着完整扫描：

$$[0, 2^{64}].$$

实际工作模式是：

- 高坐标窄窗口；
- count；
- segment streaming；
- relation filter。

Tier G

Local CPU + GPU。

适合：

- billion-scale candidates；
- 固定模板；

- 大规模 residue filter；
- massive count。

第七十四章　关系类型与推荐后端

关系	Web	Local CPU	GPU
Goldbach 单 N	✓	✓✓	可选
Twin / fixed gap 批量	✓	✓✓	✓✓
Prime tuple	✓	✓✓	✓✓✓
Green–Tao fixed slice	✓	✓✓	✓✓✓
Legendre / Oppermann	✓	✓✓	可选
Brocard 大窗口	△	✓✓✓	✓
Andrica / Firoozbakht	✓	✓✓	不需要
Mersenne	小 p	✓✓✓	专用实现
Bunyakovsky / Schinzel	小值	✓✓	视表达式
Grimm	小规模	✓✓✓	不优先
Erdős–Woods	小规模	✓✓✓	不优先
$B_H/U/\mu/e$	中小规模	✓✓✓	B_H 扫描可加速

第七十五章　合理的性能路线

Web 版的主要瓶颈可以概括为：

$$\boxed{\text{monolithic dense spectrum} + \text{main-thread compute} + \text{large DOM output.}}$$

逐项显示上限已经控制第三项。

真正的性能跃迁来自：

$$\boxed{\text{segment streaming} + \text{Web Worker / Wasm} + \text{native local engine.}}$$

所以整体路线为：

$$\boxed{\text{Web JS} \to \text{Wasm CPU} \to \text{Native CPU} \to \text{Hybrid GPU.}} \tag{75.1}$$

每一级保持同一固定谱语义和同一 RSL。

图 7-09　四级执行后端

四级后端共享同一 relation model / RSL，只改变执行能力与任务规模，不改变数学语义。

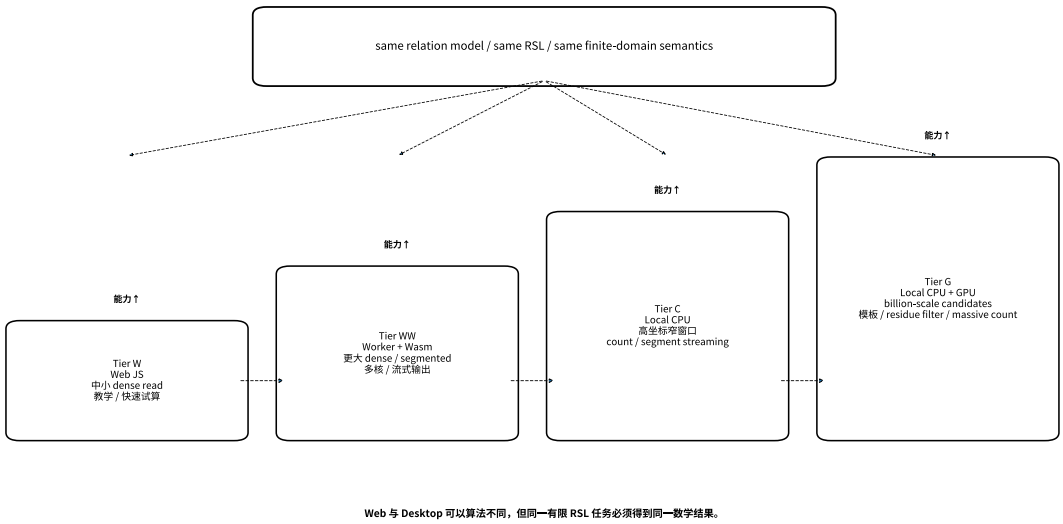


图 7-09　四级执行后端。 四级后端分别为 Tier W（Web JS）、Tier WW（Web Worker + Wasm）、Tier C（Local CPU）与 Tier G（Local CPU + GPU）。它们适合的任务规模从中小 dense read，逐步扩展到更大的 segmented scan、高坐标窄窗口和 massive residue/count 任务。后端可以使用不同算法，但 Web 与 Desktop 必须共享同一个 relation model / RSL，不能维护两套数学语义。

第八部　验证等级

第七十六章　为什么需要验证等级

“程序运行成功”不是一个足够精确的数学描述。

一次输出可能只是：

- JSON 能解析；
- 一个整数被正确判定；
- 一个有限关系被完整读取；
- 一个有限证书被验证；
- 一个参数族获得统一结构证书；
- 一个全局量词真正闭合。

这些层级必须分开。

因此定义：

$$\boxed{V_0, V_1, \dots, V_5.}$$

第七十七章　$\mathbf{V_0}$：语法可执行

满足：

- 参数合法；
- RSL 可解析；
- 位置表达式可编译；
- domain 可枚举；
- 坐标落在当前后端可表示范围。

此时只得到：

关系定义可执行.

还没有读取任何数学实例。

第七十八章　$\mathbf{V_1}$：身份读取可复核

对每一个读取位置，能够给出：

$$\boxed{A,\quad \mathcal{M}_q,\quad \partial}$$

或完整：

$$\mathrm{PF}(n).$$

并能由独立 primality / factorization 路径复核。

这是固定谱层验证。

第七十九章　V_2：有限关系读取可复核

对当前有限视界，完整保存：

$$\boxed{\text{anchor} + \text{位置} + \text{身份} + \text{predicate} + \text{hit/miss}.}$$

并且：

$$\boxed{\text{逐项表}}$$

与：

$$\boxed{\text{汇总计数}}$$

相互一致。

这是有限关系层验证。

第八十章　$\mathbf{V_3}$：有限终端证书

需要证明当前有限对象已越过所有可能改变其身份的控制层。

例如：

$$z \geq \sqrt{H}$$

完成有限端点素性认证；

或：

$$e_H^{\text{exact}} > 0$$

给出某窗口至少一条真实关系。

此时软件不仅“看见命中”，而是能够导出独立有限证书。

第八十一章　$\mathbf{V_4}$：结构批量证书

一个统一公式覆盖一个完整有限参数族。

例如：

$$e_H^{\text{struct}} = B_H - \mu_H(Q)(\Delta - 1) > 0$$

对某一整组窗口成立。

或一种关系规则能够由统一状态变换覆盖所有当前参数。

此时验证对象从单实例提升为：

$$\boxed{\text{有限参数族.}}$$

第八十二章　$\mathbf{V_5}$：全局量词闭合

最高层必须与目标量词完全匹配。

例如无限回归需要：

$$\boxed{C_R(X) \text{ 无界}}$$

或：

$$\boxed{\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_H(N) = +\infty.}$$

全称 fiber 需要：

$$\boxed{C(\theta) > 0 \quad \forall \theta.}$$

窗口全称需要：

$$\boxed{W(n) \geq 1 \quad \forall n.}$$

任意长度需要：

$$\boxed{L(X) \text{ 无界}.}$$

因此：

> V_5 **的定义不是“计算得足够大”， 而是全局量词已经由数学定理闭合。**

(82.1)

第八十三章　验证等级的基本纪律

验证等级满足：

$$\boxed{V_0 \prec V_1 \prec V_2 \prec V_3 \prec V_4 \prec V_5.}$$

较高等级必须显式包含较低等级所需的对象。

软件输出应显示：

$$\boxed{\text{当前达到的最高验证等级}}$$

而不是用一个模糊的“verified”。

这使：

$$\boxed{\text{机器状态}}$$

与：

$$\boxed{\text{数学状态}}$$

保持一致。

83.1　验证等级与形式证明链

一条经典命题的标准报告可以同时保存：

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{原命题}\\ \text{形式等价的关系标准形}\\ \text{量词类型}\\ \text{有限视界}\\ \text{当前证书}\\ \text{最高验证等级.}\end{array}} \tag{83.1}$$

因此：

$$V_0$$

回答关系能否被编译；

$$V_1$$

回答底层身份能否复核；

$$V_2$$

回答当前有限关系能否逐项复核；

$$V_3$$

回答当前关系是否已经有限终端；

$$V_4$$

回答统一证书是否覆盖完整有限参数族；

$$V_5$$

回答经典命题要求的全局量词是否已经闭合。

所以：

$$\boxed{\text{验证等级是形式证明链在执行端的坐标。}} \tag{83.2}$$

同一命题可以同时拥有不同层级的有限证书。工作台因此同时保存命题语义与当前执行等级。

图 7-10　验证等级 V0–V5

六级验证严格区分软件成功、有限证书与全局量词闭合；强度箭头与说明完全置于等级节点之外。

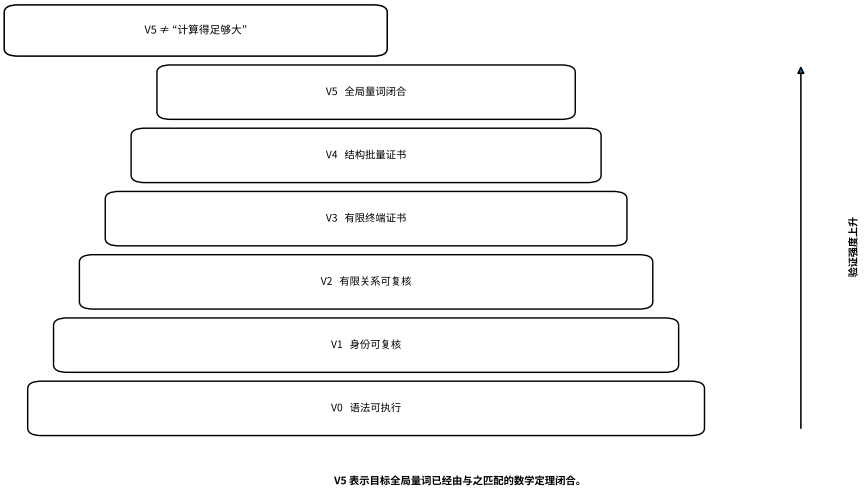


图 7-10　验证等级 V0–V5。 验证等级从 V_0 到 V_5 依次区分：语法可执行、身份读取可复核、有限关系读取可复核、有限终端证书、结构批量证书与全局量词闭合。最高等级 V_5 不是“计算得足够大”，而是无限回归、全称 fiber、窗口全称、任意长度等目标量词已经由与之完全匹配的数学定理闭合。

第九部　机器检查与复现实验

第八十四章　确定性优先

RenSpectrum 的基础关系读取应当默认确定性执行。

相同：

- 版本；
- RSL；
- 参数；
- 后端数学语义；
- 有限视界；

应产生相同的关系记录和证书。

如果某个外部算法使用随机化素性测试，则必须记录：

- 算法名称；
- bases / seed；
- 置信参数。

最终证书层应尽量转化为可独立确定性验证的形式。

第八十五章　每次运行的最小记录

一个完整运行记录至少保存：

RenSpectrum version relation name / RSL parameters anchor domain read horizon control depth z quantifier type backend maximum coordinate hit count certificate summary verification level.

(85.1)

对 balance 模块还应保存：

$$p, r, s, \Delta, B_H, U, \mu_H, C_{\mathrm{exact}}, C_{\mathrm{struct}}, e_{\mathrm{exact}}, e_{\mathrm{struct}}, T_H, D_H.$$

第八十六章　软件版本与关系版本必须同时保存

同一个数学关系可以在不同程序版本中执行。

因此复现记录需要同时保存：

software version

与：

relation specification.

对 RSL 来说，最自然的方法是保存完整 JSON。

这样即使预置菜单名称以后改变，原始关系定义仍可重新执行。

第八十七章　有限输出的完整性检查

逐项结果可能很多。

即使 UI 只渲染前：

$$5000$$

行，内部统计必须使用完整有限视界。

因此复现记录需要区分：

$$\boxed{\text{computed rows}}$$

与：

$$\boxed{\text{rendered rows.}}$$

显示截断不能改变：

- hits；
- misses；
- B_H；
- T_H；
- D_H；
- 证书状态。

第八十八章　阻塞样例是基础回归测试

模板：

$$\boxed{H = \{0,2,4\}}$$

必须被模 3 完全覆盖识别。

因此它是一个天然单元测试：

$$\boxed{\nu_H(3) = 3.}$$

如果程序把它判定为 admissible，则局部阻塞模块存在错误。

第八十九章　关系恒等式是交叉检查器

第三篇的恒等式：

$$\sum_{m} |W_K(m) \cap W_K(m+h)| = K\,T_{K,h}$$

可以作为独立实现之间的交叉检查。

左侧可以从固定和值见证场计算；

右侧可以从固定差关系直接计算。

两条路径必须相等。

因此：

理论中的精确恒等式，　天然也是软件的机器验收接口。	(89.1)

第九十章　$B_H = T_H + D_H$ 的账本检查

每个平方视界必须满足：

$$\boxed{B_H = T_H + D_H.}$$

并检查：

$$\boxed{D_H \le \mu_H(Q)|U|.}$$

以及：

$$\boxed{T_H \ge e_H^{\mathrm{exact}} \ge e_H^{\mathrm{struct}}.}$$

这些不是显示字段之间的经验关系。

它们是程序必须逐窗满足的数学一致性条件。

第九十一章　BigInt 路径与 Number 路径的交叉区

在小坐标范围内，同一个关系可以同时用：

Number

和：

BigInt

实现。

两者在安全整数区间：

$$n \le 2^{53} - 1$$

应得到完全相同的整数结果。

这一重叠区是 BigInt 路径的重要回归测试。

第九十二章　Web 与 Desktop 的语义一致性

Web 和 Desktop 可以使用不同算法：

- dense sieve；
- segmented sieve；
- primesieve；
- GMP；
- GPU filter。

但只要关系语义相同，输出的数学对象必须一致。

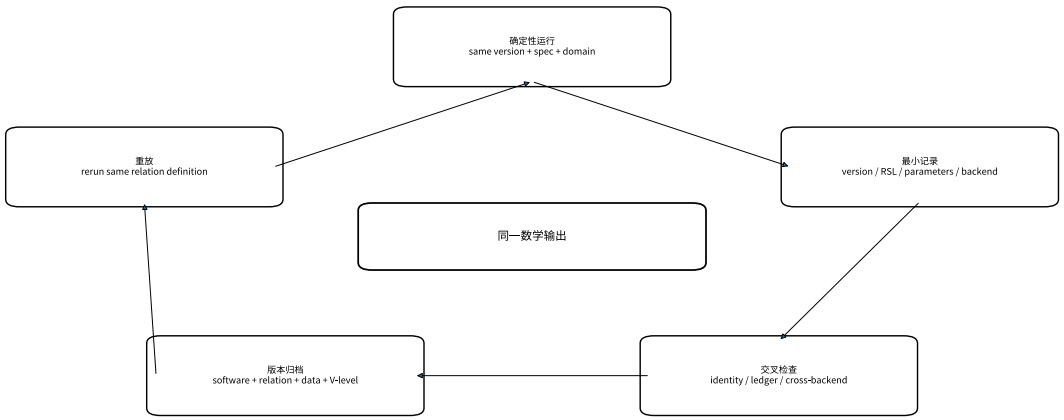
因此建立：

$$\boxed{\text{same RSL} + \text{same finite domain} \Rightarrow \text{same relation result.}} \tag{92.1}$$

这使后端可以自由优化而不改变理论。

图 7-11　机器检查与复现实验闭环

确定性运行、最小记录、交叉检查、版本归档与重放构成闭环；连接线沿节点外缘行走。



显示行可以截断；内部有限统计与证书不能被 UI 截断。

图 7-11　机器检查与复现实验闭环。 复现实验以确定性执行为默认：相同版本、关系 spec、参数、有限视界与相同数学语义应产生相同关系记录和证书。每次运行保存最小记录与验证等级，再用阻塞样例、关系恒等式、$B_H = T_H + D_H$ 账本、Number/BigInt 重叠区以及 Web/Desktop 同语义任务做交叉检查，随后归档软件版本和关系版本，并允许以后重放同一任务。

第十部　完整参数词典

第九十三章　身份谱参数

$$\boldsymbol{I(n)}$$

整数 n 的完整固定身份记录。

$$\boldsymbol{\alpha(n)}$$

$$\alpha(n) = 1$$

表示 n 为素数。

$$\boldsymbol{P^{-}(n)}$$

最小素因子。

$$\boldsymbol{\Omega(n)}$$

按重数计的素因子总数。

$$\mathbf{PF}(\boldsymbol{n})$$

不同素因子集合。

$$\boldsymbol{A}$$

原子集合。

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}$$

乘法占位集合。

第九十四章　关系语言参数

$$\Theta$$

关系外部参数。

x / anchor

关系实例的自由坐标。

$$f_i$$

位置映射。

$$\mathcal{B}$$

局部关系谓词。

$$Q$$

外层量词。

$$H$$

固定偏移模板。

$$k$$

模板长度、等差长度或关系长度参数。

$$d$$

固定差或等差步长。

$$N$$

固定和值目标或其他全局目标。

$$A, B$$

仿射映射：

$$Ap + B$$

的系数。

第九十五章　有限视界与接缝参数

$$\boldsymbol{z}$$

当前控制深度。

$$\boldsymbol{W_z}$$

有限控制层共同相位周期：

$$W_z = \prod_{\substack{q \le z \\ q \text{ odd prime}}} q.$$

$$\boldsymbol{p < r < s}$$

连续奇素数。

$$\boldsymbol{r^2}$$

当前平方视界左接缝。

$$\boldsymbol{s^2}$$

下一生成接缝。

$$\boldsymbol{\Delta}$$

$$\Delta = s - r.$$

第九十六章　阻塞参数

$$\boldsymbol{\nu_H(q)}$$

模板 H 模 q 占据的不同余类数。

$$\boldsymbol{\nu_H(q)}$$

$$\nu_H(q) = q - \nu_H(q).$$

允许余类数。

admissible

表示：

$$\nu_H(q) < q$$

对所有需要检查的素数 q 成立。

第九十七章　供给—吸收参数

$$\boldsymbol{B_H}$$

当前平方视界的旧历史完整关系供给。

$$\boldsymbol{U(r,s)}$$

有限吸收余因子资源池。

$$\boldsymbol{Q}$$

用于限制资源复用度的 wheel 素数集合。

$$\boldsymbol{M_Q}$$

$$M_Q = \prod_{q \in Q} q.$$

$$\boldsymbol{J_H(c;Q)}$$

给定 wheel 单位余类 c 时可承担吸收的模板角色集合。

$$\boldsymbol{\mu_H(Q)}$$

最大吸收复用度：

$$\mu_H(Q) = \max_c |J_H(c;Q)|.$$

$$\boldsymbol{C_H^{\mathrm{exact}}}$$

$$C_H^{\mathrm{exact}} = \mu_H(Q)|U|.$$

$$\boldsymbol{C_H^{\mathrm{struct}}}$$

$$C_H^{\mathrm{struct}} = \mu_H(Q)(\Delta - 1).$$

$$\boldsymbol{e_H^{\mathrm{exact}}}$$

$$e_H^{\mathrm{exact}} = B_H - C_H^{\mathrm{exact}}.$$

$$\boldsymbol{e_H^{\mathrm{struct}}}$$

$$e_H^{\mathrm{struct}} = B_H - C_H^{\mathrm{struct}}.$$

$$\boldsymbol{T_H}$$

真实全原子关系数。

$$\boldsymbol{D_H}$$

真实死亡数：

$$D_H = B_H - T_H.$$

第九十八章　量词参数

$$C_R(X)$$

无限回归累计命中数。

$$C(\theta)$$

固定参数 fiber 的 witness 数。

$$W(n)$$

窗口占据数。

$$L(X)$$

视界 X 内最大已实现关系长度。

$$P(X)$$

成功参数 fiber 数。

$$F(X)$$

逐索引全称谓词的累计失败数。

$$K_*$$

身份块分离所需的统一有限块长。

第九十九章　软件预算参数

max coordinate

当前任务可能读取的最大整数坐标。

anchors

当前有限任务需要展开的 anchor 数。

dense bytes

稠密谱裸数组估计：

$$5(N+1)\ \text{bytes}.$$

CPU logical threads

浏览器可见逻辑线程。

browser-visible memory tier

浏览器公开的粗内存档位。

WebGPU

当前浏览器是否可探测 GPU compute 接口。

cross-origin isolation

是否满足 SharedArrayBuffer / Wasm threads 条件。

DOM row cap

当前：

$$5000.$$

task risk

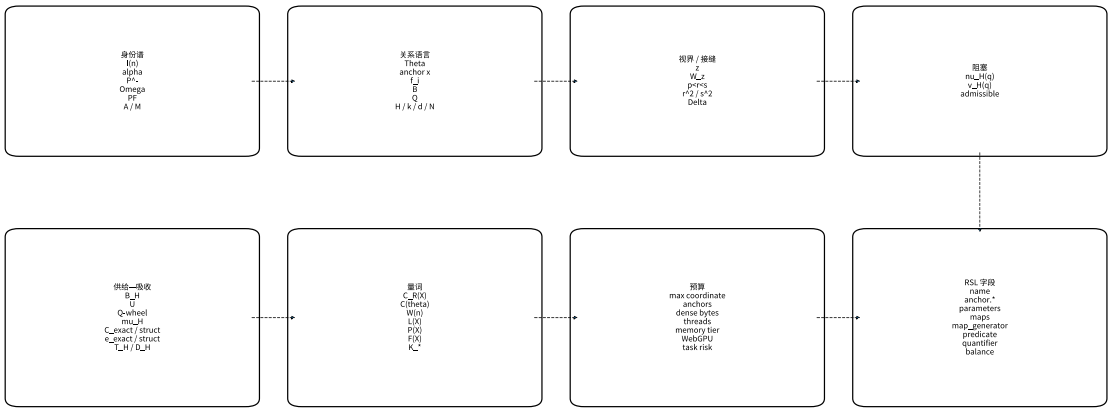
$$\boxed{\text{LIGHT} \mid \text{MODERATE} \mid \text{HEAVY} \mid \text{BLOCKED}.}$$

第一百章　RSL 字段词典

字段	含义
name	关系名称
anchor.var	anchor 变量名
anchor.domain	integer / prime / odd / even
anchor.start	有限起点
anchor.end	有限终点
parameters	固定关系参数
maps	固定长度位置映射
map_generator	可变长度位置束
id	映射结果标识
expr	整数表达式
predicate	局部关系谓词
quantifier	外层量词
balance	可选阻塞 / 吐出—吸收接口

图 7-12　参数词典关系图

参数按身份谱、关系语言、视界/接缝、阻塞、供给—吸收、量词、预算与 RSL 字段分群；边表示执行依赖而非数值等价。



词典不是死表：它描述从身份读取到执行与证书的参数依赖网络。

图 7-12　参数词典关系图。 第十部参数词典可以分成八组：固定身份谱参数、关系语言参数、有限视界与接缝参数、局部阻塞参数、供给—吸收参数、量词参数、软件预算参数与 RSL 字段。它们不是彼此孤立的字段列表：身份与关系参数决定读什么，视界与阻塞决定有限控制，供给—吸收与量词决定证书结构，预算参数决定后端执行方式，RSL 字段把这些语义重新编译成可执行对象。

第十一部　复现实验协议

第一百零一章　协议目标

复现实验的目标不是把屏幕截图保存下来。

真正需要保存的是：

别人能否从同一关系定义重新得到同一数学输出。

因此协议围绕：

定义 + 参数 + 后端 + 证书

建立。

第一百零二章　协议 A：固定关系读取

保存：

1. RenSpectrum 版本；
2. 关系名称；
3. 完整 RSL 或等价内置 spec；
4. 参数；
5. anchor domain；
6. read horizon；
7. control depth；
8. filter；
9. max coordinate；
10. hits / total；
11. 验证等级。

重新运行后要求：

$$\boxed{\text{逐项身份一致}}$$

以及：

$$\boxed{\text{汇总计数一致.}}$$

第一百零三章　协议 B：阻塞证书

保存：

$$H,\quad q,\quad \nu_H(q),\quad v_H(q).$$

若：

$$\nu_H(q) = q,$$

必须输出：

$$\boxed{\text{局部完全覆盖证书.}}$$

可独立通过余类枚举复核。

第一百零四章　协议 C：吐出—吸收证书

保存每个平方视界：

$$p, r, s, \Delta.$$

并保存：

$$B_H, \quad U, \quad Q, \quad M_Q, \quad \mu_H(Q),$$

$$C_H^{\mathrm{exact}}, \quad C_H^{\mathrm{struct}}, \quad e_H^{\mathrm{exact}}, \quad e_H^{\mathrm{struct}}, \quad T_H, \quad D_H.$$

独立复核至少检查：

$$B_H = T_H + D_H,$$

$$D_H \le \mu_H(Q)|U|,$$

$$T_H \ge e_H^{\mathrm{exact}} \ge e_H^{\mathrm{struct}}.$$

第一百零五章　协议 D：累计无限接口

保存连续窗口序列：

$$e_{H,1}, e_{H,2}, \ldots.$$

定义：

$$\mathcal{E}_H(N) = \sum_{j \le N} e_{H,j}.$$

有限实验只记录：

$$\mathcal{E}_H(N)$$

在当前 N 的值和轨迹。

若一个数学定理进一步证明：

$$\limsup_{N \to \infty} \mathcal{E}_H(N) = +\infty,$$

则验证等级提升至：

$$\boxed{\mathrm{V}_5}.$$

第一百零六章　协议 E：BigInt 与大整数证书

保存：

- 整数表达式；
- BigInt 十进制或十六进制值；
- primality algorithm；
- 证书参数；
- 模运算结果；
- 独立 verifier 结果。

对于 Mersenne，可记录：

$$p, \quad M_p = 2^p - 1,$$

以及 Lucas–Lehmer 的最终状态。

第一百零七章　协议 F：Web / Desktop 交叉复核

选择同一有限 RSL 任务。

分别使用：

Web dense / Wasm

和：

Desktop segmented

执行。

比较：

- identities；
- hits；
- misses；
- $B_H/U/\mu/e/T/D$；
- certificates。

要求：

数学输出完全一致.

性能可以不同；

语义不能不同。

第一百零八章　协议 G：版本归档

每个可引用结果保存：

$$\boxed{\text{软件版本} + \text{关系定义版本} + \text{数据文件} + \text{运行参数} + \text{验证等级}.}$$

若实现允许，应附：

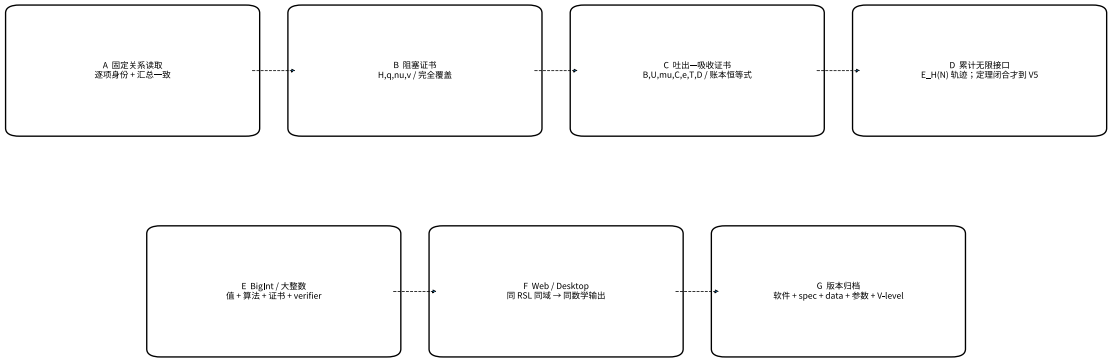
- source commit；
- build id；
- OS / browser；
- CPU；
- memory tier；
- GPU；
- execution time。

这些字段用于复现性能；

数学输出的核心仍是关系 spec 与证书。

图 7-13　七类复现实验协议

A–G 分别覆盖固定关系、阻塞、供给—吸收、累计无限、大整数、跨后端与版本归档。



协议目标：别人能从同一关系定义重新得到同一数学输出。

截图不是证书；定义 + 参数 + 后端 + 证书才构成复现记录。

图 7-13　七类复现实验协议。 七类协议分别覆盖：A 固定关系读取，要求逐项身份与汇总计数一致；B 阻塞证书，保存 $H, q, \nu_H(q), \nu_H(q)$；C 吐出—吸收证书，保存并检查 B, U, Q, μ, C, e, T, D 账本；D 累计无限接口，记录 $\mathcal{E}_H(N)$ 的有限轨迹而由额外数学定理决定是否提升到 V_5；E BigInt 与大整数证书；F Web/Desktop 同 RSL 交叉复核；G 软件、关系、数据、参数与验证等级的版本归档。

第十二部　开放架构

第一百零九章　预置关系不是系统边界

一个关系出现在菜单中，只表示：

它具有方便的预置界面.

它不表示：

只有这些关系属于理论.

理论边界由：

$$\boldsymbol{I} + f_i + \mathcal{B} + \mathcal{Q}$$

决定。

RSL 把这一边界开放给使用者。

第一百一十章　从“证明问题”到“编译问题”

面对一个新的素数问题，先问：

$$\boxed{\text{它的对象是什么？}}$$

然后问：

$$\boxed{\text{它真正要求什么身份？}}$$

再问：

$$\boxed{\text{位置映射是什么？}}$$

$$\boxed{\text{哪个有限历史已经足以认证？}}$$

$$\boxed{\text{真正困难的量词是什么？}}$$

这些问题在前六篇中分别对应：

$$\boxed{\text{对象} + \text{关系} + \text{身份} + \text{终端} + \text{量词}.}$$

进入 RenSpectrum 后，则对应：

$$\boxed{\text{RSL} + \text{control depth} + \text{certificate} + \text{quantifier interface}.}$$

但在执行以前，还要完成一件严格的数学工作：

$$\boxed{\text{原命题} \Leftrightarrow \text{关系标准形}.}$$

这就是第六篇建立的形式证明。

于是完整顺序成为：

$$\boxed{\text{原始对象} \to \text{关系} \to \text{目标身份} \to \text{形式等价} \to \text{有限视界} \to \text{真实死亡} \to \text{证书} \to \text{量词} \to \text{执行}.} \tag{110.1}$$

所以：

一个问题先获得准确的数学位置， 再选择最适合它的证明工具与执行后端。

(110.2)

第一百一十一章　统一的不是符号，而是信息流

如果一个系统只是把很多问题换成同一种记号，那不是真正的统一。

这里统一的是：

原子怎样被读取

关系怎样被编译

候选怎样真实死亡

有限视界怎样终端

无限量词怎样闭合

证书怎样复核

以及：

经典命题怎样无损回译.

因此：

母体的真正优势不是统一符号，而是统一信息流。 (111.1)

这条信息流从经典语言开始，经由形式证明进入关系语言，再由 RSL 进入可执行层，最后由证书返回数学命题。

RenSpectrum 把这条信息流变成可以执行、记录和复核的对象。

第一百一十二章　为什么问题会以这种形式出现

一个成熟的关系工作台不能只回答：

> 这个实例算出来是什么？

它还应让使用者看到：

> 为什么这个问题天然具有这样的结构？

Goldbach 为什么是反射？

因为：

$$p + (N - p) = N.$$

Twin 为什么是平移？

因为：

$$p \mapsto p + 2.$$

固定和值为什么有自然终端？

因为固定和值限制端点最大位置。

固定差为什么没有共同终端？

因为整个关系可以向右平移。

平方为什么成为重要边界？

因为有限素性认证由平方根控制。

局部阻塞为什么先于无限回归？

因为一个完全覆盖的模层已经关闭全部长期全原子可能。

所以：

关系语言不只执行答案；它也展示问题为什么会具有这种形状。

(112.1)

第一百一十三章　开放不是无限增加按钮

开放架构最容易被误解为：

> 再增加更多菜单项。

真正的开放是：

新关系可以用已有原语自行编译。

这就是 RSL 的意义。

如果一个使用者提出：

$$f_1(n), \dots, f_r(n)$$

的新关系，

系统首先问：

能否由现有 maps / predicate / quantifier 表达？

如果可以，理论不变。

只有关系定义增加。

这使系统能够不断生长，却不会不断膨胀母体。

第一百一十四章　新的关系也可以反过来检查理论语言

开放不是单向的。

一个新关系如果无法由现有 RSL 表达，可能出现两种情形：

第一种：

只是缺少一种读取原语.

此时扩展 predicate 或 map language 即可。

第二种：

它真正需要固定谱中尚未保存的身份字段.

此时应明确说明需要增加哪一种算术身份记录。

因此新关系既是使用者，也是语言的检验者。

第一百一十五章　软件不会替读者思考

RenSpectrum 可以：

- 枚举；
- 编译；
- 过滤；
- 计数；
- 画出关系履历；
- 给出有限证书；
- 复核恒等式。

但一个新的数学想法仍然来自：

人看见了什么关系值得被定义。

所以可执行系统的价值不是把数学变成按钮。

它是把机械负担交给机器，让人更清楚地看见：

对象 + 关系 + 量词.

第一百一十六章　一个开放工作台应当允许失败留下来

如果某个关系在某个视界失败，系统不应只显示：

NO.

它应尽可能保留：

- 哪个端点失败；
- first-killer 是谁；
- 是否局部阻塞；
- 是否只是当前有限视界未命中；
- 哪个资源吸收了关系；
- 哪一种量词仍然未被决定。

因此：

失败不是删除；　　失败也是关系知识。	(116.1)

这与全书的真实死亡观一致。

第一百一十七章　从固定谱到开放知识生成

本书形成一条稳定链：

$$\boxed{\text{原子} \to \text{关系} \to \text{履历} \to \text{视界} \to \text{读出.}}$$

第六篇在这条链上增加：

$$\boxed{\text{形式证明} \to \text{经典命题回译.}}$$

RenSpectrum 再增加：

$$\boxed{\text{编译} \to \text{执行} \to \text{证书} \to \text{复现.}}$$

因此整个体系成为：

$$\boxed{\text{数学结构} \to \text{形式证明} \to \text{关系语言} \to \text{可执行知识} \to \text{可复核证书.}} \tag{117.1}$$

形式证明保证原命题与关系标准形之间没有语义损失；可复核证书保证执行结果能够返回数学证明链。

因此可执行知识不是正文之外的第二套系统，而是正文定理的操作表面。

图 7-14　开放架构：从预置问题到关系编译

预置菜单只是方便入口；理论边界由固定身份、位置映射、局部谓词与量词决定，RSL 让自定义关系进入同一编译与证书系统。

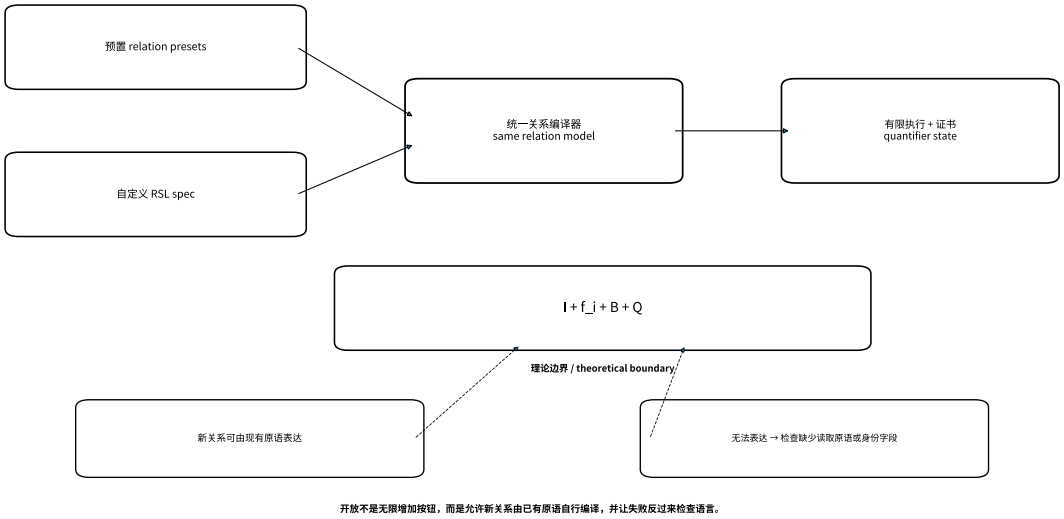


图 7-14　开放架构：从预置问题到关系编译。 预置菜单只表示某些关系拥有方便入口，并不构成理论边界。系统的理论边界由 $\boldsymbol{I} + f_i + \mathcal{B} + \mathcal{Q}$ 决定；只要新关系能由现有 maps、predicate 与 quantifier 表达，它就可以通过自定义 RSL 进入与预置问题相同的编译、有限执行和证书系统。若新关系无法表达，则应进一步判断只是缺少读取原语，还是固定谱缺少必要身份字段；因此新关系也会反过来检验语言。

第十三部　全书收束

第一百一十八章　从七篇重新看全书

第一篇回答：

整数身份与原子关系母体怎样建立？

第二篇回答：

关系怎样在有限移动视界中永久保存？

第三篇回答：

关系怎样形成和—差—积几何，并进入统一切片与量词？

第四篇回答：

局部许可怎样形成 CRT 生存树，并进入真实死亡与关系字母表？

第五篇回答：

有限关系供给、吸收与证书怎样精准进入全局量词？

第六篇回答：

经典命题怎样被逐项证明与统一关系语言严格等价？

第七篇回答：

怎样让形式证明、关系定义、证书与计算成为同一个开放执行系统？

七篇由此形成：

$$\begin{array}{c}\text{身份}\\ \Downarrow\\ \text{关系与履历}\\ \Downarrow\\ \text{导出几何与量词}\\ \Downarrow\\ \text{有限控制与终端身份}\\ \Downarrow\\ \text{证书与全局量词}\\ \Downarrow\\ \text{经典命题形式证明}\\ \Downarrow\\ \text{执行与复现.}\end{array} \tag{118.1}$$

因此，第七篇并不是在数学正文之后附加一个软件层。

它把前六篇的数学对象重新聚合为：

可定义 + 可执行 + 可验证 + 可复现 + 可继续扩展.

第一百一十九章　原子先于问题，关系先于命名

全书可以压缩为一句次序：

原子先于问题； 关系先于命名； 履历先于统计； 有限终端先于无限叙述； 问题最终只是母体的不同读出。

(119.1)

这句话不是要求所有问题变得相同。

它恰恰要求：

每一种关系都在自己的真正结构中被保存.

固定和仍然是固定和。

固定差仍然是固定差。

窗口仍然是窗口。

多项式仍然是多项式。

因子集合仍然是因子集合。

统一没有抹掉差异。

统一只是让这些差异不再彼此孤立。

第一百二十章　从“怎样证明”到“为什么问题会出现”

数学问题常从一句命题开始：

> 怎样证明它？

关系母体多问一步：

为什么这个命题会以这种形式出现？

这个问题不会削弱证明。

它会让证明对象更清楚。

Goldbach 的固定和来自二原子和值坐标。

Twin 的固定差来自二原子差值坐标。

平方视界来自有限素性认证的平方根阈值。

自然终端段来自固定和值对端点的天然上界。

资源池来自真实死亡留下的实际余因子。

RSL 则把这些结构直接写进可执行关系定义。

所以：

当问题回到它真正的关系位置， 证明工作会从外部搜索转化为内部结构的精确读取。

(120.1)

第一百二十一章　经典方法不再彼此孤立

筛法读取局部乘法占位。

圆法读取固定和频率。

大筛与平均分布读取模结构的统计均匀。

小间隔方法读取有限差值带。

高阶组合方法读取高维仿射结构。

L-函数读取全局谱。

素性证书读取有限对象的终端身份。

RenSpectrum 把它们放在同一关系语言之前。

所以：

方法不需要彼此取代； 它们可以从不同层面读取同一个关系母体。

(121.1)

当对象、关系、终端和量词已经被写清楚以后，方法选择反而更自由，也更准确。

筛法可以继续筛；

Fourier 分析可以继续读频率；

代数数论可以继续寻找共同代数结构；

组合方法可以继续做匹配与高阶组织；

计算可以继续展开有限视界；

证书方法可以继续压缩有限验证。

因此保留全书的方法纪律：

统一底层，不统一工具； 统一对象，不抹平问题； 统一语言，不取消创造。

(121.2)

以及：

母体不是方法的终结，　　而是方法选择变得更准确的开始。 (121.3)

第一百二十二章　统一母体不是知识档案馆

一个真正开放的理论不能只负责整理已经知道的东西。

它必须允许：

新的关系被定义

新的切片被发现

新的证书被构造

新的结构映射被识别.

因此保留全书的一句核心表达：

统一母体不是已经完成知识的归档系统， 而是能够继续产生新知识的结构。

(122.1)

RenSpectrum 把这种开放性从书面原则变成了接口。

第一百二十三章　开放的真正含义：共同入口与方法自由

开放不是说：

> 什么都可以放进来。

开放意味着边界足够清楚，所以新的东西知道应该从哪里进入。

一个新关系可以问：

我的位置映射是什么？

我的身份字段是什么？

我的有限终端在哪里？

我的局部阻塞是什么？

我的量词是哪一种？

我的证书怎样被别人复核？

只要这些问题能够回答，它就有清楚的位置。

这就是开放架构最重要的秩序。

123.1　不同的人可以从不同入口进入

统一关系母体最值得共享的地方，是任何人都可以从自己熟悉的数学进入。

有人擅长筛法，可以问：

新的关系轨道上，真实死亡层怎样计数？

有人擅长 Fourier 分析，可以问：

固定关系 fiber 的频率读出怎样与有限视界对应？

有人擅长代数数论，可以问：

特殊轨道的共同代数结构能否生成关系证书？

有人擅长组合数学，可以问：

关系供给与吸收能否形成更一般的 matching 定理？

有人擅长计算，可以问：

哪些有限视界规律可以被完整复现并转化为定理对象？

有人擅长几何，可以问：

高维 prime-gap cell complex 还有哪些度量、拓扑或不变量？

因此：

> **统一母体不是把问题从别人手里拿走， 而是给更多人一个共同的入口。**

(123.1)

123.2 开放工作的数学乐趣

数学最有价值的部分不只在最后一个答案。

它也包括：

- 找到真正的问题；
- 看见以前没有看见的对象；
- 发现两种相距很远的方法其实作用于同一结构；
- 把复杂障碍压缩成清楚关系；
- 构造一个别人可以独立复核的证书；
- 让一个熟悉问题产生新的数学对象；
- 把自己的方法交给别人继续使用。

因此开放体系真正共享的是：

> **共同发现对象，共同寻找关系，共同构造方法，共同验证结果， 并共同享受问题逐渐变清楚的过程。**

(123.2)

第一百二十四章　机器与人的分工

固定谱中有大量重复劳动：

- 筛；
- 因子分解；
- 余类扫描；
- 关系枚举；
- 计数；
- 证书核对。

这些工作非常适合机器。

但机器不会替代：

$$\boxed{\text{选择值得研究的关系}}$$

$$\boxed{\text{发现新的结构映射}}$$

$$\boxed{\text{提出新的量词闭合方式}}$$

$$\boxed{\text{理解一个公式为什么重要.}}$$

所以：

可执行数学最好的状态，不是让人离开数学，而是让人从重复计算中腾出手来，更专注地看关系。

(124.1)

机器尤其适合保存：

$$\boxed{\text{完整关系定义} + \text{逐项身份} + \text{失败原因} + \text{证书} + \text{版本} + \text{复现路径.}}$$

人可以把注意力放在：

$$\boxed{\text{关系为什么值得定义} + \text{什么结构真正能够闭合量词} + \text{不同读出之间是否存在新的传递.}}$$

于是人和机器共享的不是一个答案按钮，而是一份可复核、可传递的数学工作对象。

第一百二十五章　一个读者怎样继续使用这本书

读者不必从某个具名问题开始。

可以从任何一个自己关心的关系开始。

第一步，写出原始对象：

$$x_1, \dots, x_r.$$

第二步，写出位置映射：

$$F = (f_1, \dots, f_r).$$

第三步，指定目标身份或乘法深度。

第四步，写出局部关系谓词：

$$\mathcal{B}.$$

第五步，写出原命题的量词：

$$Q.$$

第六步，证明原命题与关系标准形双向等价：

$$\boxed{\mathcal{P} \Leftrightarrow Q[\mathcal{B}(\boldsymbol{I}(f_1), \dots, \boldsymbol{I}(f_r))].} \tag{125.1}$$

第七步，找到有限观察区域与自然终端视界。

第八步，写出真实死亡机制与 first-killer。

第九步，若关系属于持续型或批量型，写出实际关系供给：

$$B_H.$$

第十步，写出吸收资源与复用度：

$$U, \qquad \mu_H.$$

第十一步，构造有限证书或累计证书，并让它进入目标量词。

第十二步，把同一关系写入 RSL，让 RenSpectrum 执行有限部分、保存证书并生成复现记录。

因此整个入口可以压缩为：

$$\boxed{\text{对象} \to \text{关系} \to \text{身份} \to \text{形式证明} \to \text{视界} \to \text{死亡} \to \text{供给—吸收} \to \text{证书} \to \text{量词} \to \text{执行}.} \tag{125.2}$$

于是软件真正想做的不是给出一个巨大的答案表，而是：

$$\boxed{\text{让每个问题把自己真正困难的部分说清楚。}} \tag{125.3}$$

第一百二十六章　从网页到开放实现

RenSpectrum Web 是最轻的入口。

它适合：

- 阅读；
- 教学；
- 中小规模读谱；
- RSL 编辑；
- 分享关系定义。

RenSpectrum Desktop 负责：

- segmented spectrum；
- BigInt；
- long-running jobs；
- checkpoint；
- batch RSL；
- 本地结果库；
- CPU / GPU 调度。

二者共享：

$$\boxed{\text{同一种数学语义。}}$$

因此一个关系可以从书中的形式证明进入 RSL，从 RSL 进入 Web，再从 Web 迁移到本地大规模执行，而不改变它的数学身份。

这条映射是：

$$\boxed{\text{书中定理} \leftrightarrow \text{关系标准形} \rightarrow \text{RSL} \rightarrow \text{Web / Desktop} \rightarrow \text{证书与复现记录.}} \tag{126.1}$$

Web 适合作为最轻的公共入口；

Desktop 适合承担高坐标、长窗口、BigInt 与批量任务；

计算规模变化不改变关系语义。

图 7-15　从全书理论到 RenSpectrum 的信息流

把多对多斜线改为四条清晰信息通道：理论来源 → 编译接口 → 执行 / 证书输出。

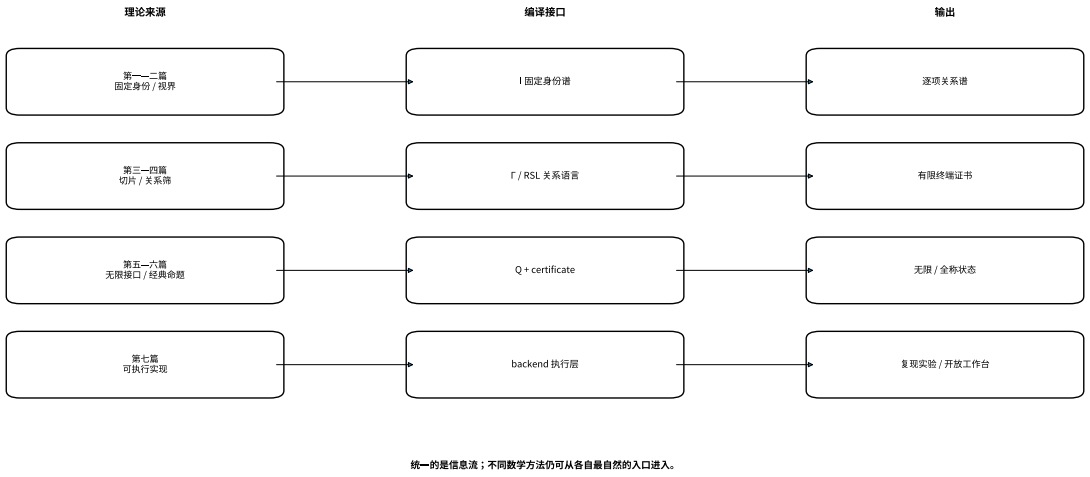


图 7-15　从全书到 RenSpectrum 的信息流。 第七篇最终把全书的信息流压缩为一条不改变数学身份的执行链：书中定义与定理首先进入统一关系标准形 $\boldsymbol{I} + f_i + \mathcal{B} + Q$，再编译为 RSL，随后由 Web 或 Desktop 执行有限任务，输出身份、关系、终端或批量证书，并连同版本、数据与验证等级保存为复现记录。新关系、新切片、新证书与新方法则可以通过开放接口重新回到关系对象层。

第一百二十七章　全书最后的参数不再只是参数

到这里，参数已经不再是一组软件输入框。

$$N$$

代表一个固定和值 fiber。

$$d$$

代表一个固定差方向。

$$H$$

代表一束固定偏移关系。

$$z$$

代表当前有限控制深度。

$$r^2, s^2$$

代表平方视界的两条边界。

$$B_H$$

代表关系供给。

$$U$$

代表真实死亡能够使用的有限资源。

$$\mu_H$$

代表资源复用能力。

$$e_H$$

代表供给超过吸收以后留下的净关系势。

$$\varepsilon_H$$

把有限视界连接到无限量词。

而：

$$\mathsf{V}_0, \ldots, \mathsf{V}_5$$

记录当前执行位于形式证明链的哪一个数学层级。

所以一个完整参数集既包括：

算什么

也包括：

为什么这样算

以及：

这个结果在证明链中处于哪里.

因此：

一个好的程序参数，应当直接对应一个清楚的数学对象。 (127.1)

RenSpectrum 的界面只是这些对象的可操作表面。

第一百二十八章　全书最后的结论

如果只看到素数，我们会不断证明关于素数的命题。

如果看到固定身份谱，就会发现：

同一个整数不需要在不同问题中被反复重新定义.

如果进一步看到关系，就会发现：

同一批原子已经同时携带和、差、模板、窗口与更高阶结构.

如果再看到履历与有限视界，就会发现：

一个无限关系可以由一列完整有限世界进入数学验收.

如果把量词分开，就会发现：

全称、无限回归、任意长度、参数无限并不是同一个“无限”.

如果再加入形式证明，就会发现：

经典命题可以无损进入统一关系语言，并从统一语言回到原命题.

如果再把这些对象写进 RSL，就会发现：

很多新的关系不要求重建母体；　它们要求的是准确写出自己的关系读法.

所以这本书最终形成的，不是一套只服务于少数经典问题的封闭技巧。

它留下的是：

一个固定但不僵硬的事实底座， 一套严格但开放的关系语言， 一组能够进入全局量词的证书接口， 以及一条从数学命题通向可执行复核的清楚道路。

RenSpectrum 是这条道路的可执行入口。

它让定义可以运行，让关系可以逐项展开，让失败可以留下原因，让证书可以交给别人复核，也让一个新的问题在进入证明以前先获得自己的位置。

更重要的是，它把共同工作变成一种具体数学形式。

一个人可以提供新的位置映射；

一个人可以证明局部阻塞定理；

一个人可以找到更精确的吸收容量；

一个人可以构造素性证书；

一个人可以发现高阶关系向低阶关系的投影；

另一个人可以把全部对象写进 RSL，并让每一步都留下可复核记录。

它们不要求使用同一种方法，因为：

大家处理的是同一个关系世界的不同切面。 (128.1)

因此全书留下的开放性，是一个已经具有明确对象、语言和接口的共同工作空间。

保留两句关于开放的方法纪律：

统一底层，不统一工具； 统一对象，不抹平问题； 统一语言，不取消创造。

(128.2)

以及：

统一母体不是把问题从别人手里拿走， 而是给更多人一个共同的入口。

(128.3)

一个新的关系出现时，它不需要先问：

> 这里有没有为我准备一个按钮？

它可以先问：

我的关系是什么？

然后把它写下来。

这正是开放架构最有人情味的地方：

理论不要求后来者只重复已有问题； 它给后来者留下了继续书写的位置。

这个位置可以由不同的人用不同方法继续书写。

因此数学重新成为一件可以共享的事情：

共同发现对象，共同寻找关系，共同构造方法，共同验证结果， 并共同享受问题逐渐变清楚的过程。

(128.4)

人与工具之间也不需要争夺谁才是数学的主人。

机器负责把已经说清楚的事情可靠地做完。

人继续去看：

还有什么关系尚未被看见。

于是全书最后留下的，不是一个停止符。

而是一扇已经打开的门。

原子先于问题； 关系先于命名； 履历先于统计； 有限终端先于无限叙述； 形式证明保证命题无损进入统一语言； 而新的关系，仍然可以从这里继续发生。

如何使用本书的参考文献

如果你希望沿着本书的讨论继续向经典文献、标准定理与传统方法深入，可以按照下面的脉络使用参考文献。

- 如果你想了解素数研究的历史背景，包括 Goldbach–Euler 通信、Polignac 猜想以及 Landau 提出的四个经典问题，可优先阅读 [1]–[10]、[30]–[32]、[55]–[56]。
- 如果你关心 Goldbach 问题、三素数问题、Chen 型关系以及圆法的发展脉络，可参照 [11]–[16]、[51]。
- 如果你希望进一步理解局部阻塞、筛法、almost-prime（几乎素数）、粗糙数以及有限控制思想，可参照 [17]–[22]、[38]、[50]。
- 如果你关心 Twin、固定差、prime tuples（素数元组）、有界间隔以及等差素数结构，可参照 [23]–[29]。
- 如果你希望了解多项式轨道、窗口、因子集合以及与这些结构相关的经典猜想，可参照 [30]–[36]、[54]。
- 如果你想从更广的解析与谱视角理解素数，包括 ζ 函数、L-函数、素数定理（PNT）、黎曼猜想（RH）、广义黎曼猜想（GRH）以及全局谱接口，可参照 [5]–[8]、[37]–[41]。
- 如果你关心有限素性认证、机器验收，以及 RenSpectrum 背后的可执行思想，可参照 [42]–[46]。

需要特别说明的是，本书提出的“固定算术身份谱—原子关系母体—有限移动视界—关系筛—量词证书—RenSpectrum”体系，是本书内部建立的一套理论构造。

这些外部参考文献的作用，是帮助你确认经典对象从哪里来、历史问题如何形成、标准定理怎样表述，以及传统方法在整个素数研究版图中处于什么位置。它们并不替代本书自身的定义、定理与证明链。

因此，你完全可以把这份参考文献理解成两张彼此连接的地图：

一张地图通向已经存在的数学传统；

另一张地图，则帮助你判断本书所提出的新结构究竟从哪里出发，又试图走向哪里。

如果你在阅读某一章时，希望进一步追溯它与经典数学之间的联系，可以从上面的主题分组开始，而不必从头到尾依次阅读全部书目。

参考文献

一　古典基础、素数史与解析数论起点

[1] Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol. II, Book IX, Proposition 20. Translated with introduction and commentary by T. L. Heath. Cambridge University Press, 1908.

[2] Hardy, G. H.; Wright, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th ed., revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman. Oxford University Press, 2008.

[3] Goldbach, C.; Euler, L. Correspondence of 1742 concerning representations by primes. See: P.-H. Fuss (ed.), *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, St. Petersburg, 1843; and the modern historical account in the MacTutor History of Mathematics, "Christian Goldbach."

[4] Euler, L. "Variae observationes circa series infinitas." *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 9 (1744), 160–188.

[5] Dirichlet, P. G. L. "Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält." *Abhandlungen der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften* (1837), 45–81.

[6] Riemann, B. "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse." *Monatsberichte der Berliner Akademie* (1859), 671–680.

[7] Hadamard, J. "Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques." *Bulletin de la Société Mathématique de France* 24 (1896), 199–220.

[8] de la Vallée Poussin, C.-J. "Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Première partie: La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général." *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* 20 (1896), 183–256.

[9] de Polignac, A. "Recherches nouvelles sur les nombres premiers." *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* 29 (1849), 397–401; erratum, 738–739.

[10] Pintz, J. "Landau's problems on primes." *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* 21 (2009), no. 2, 357–404.

二　Goldbach、加法素数问题与圆法

[11] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. "Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes." *Acta Mathematica* 44 (1923), 1–70.

[12] Vinogradov, I. M. "Representation of an odd number as the sum of three primes." *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS* 15 (1937), 291–294.

[13] Chen, J.-R. "On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes." *Scientia Sinica* 16 (1973), 157–176.

[14] Helfgott, H. A. "The ternary Goldbach conjecture is true." arXiv:1312.7748, 2013.

[15] Helfgott, H. A. *The Ternary Goldbach Problem*. arXiv:1501.05438, 2015.

[16] Nathanson, M. B. *Additive Number Theory: The Classical Bases*. Graduate Texts in Mathematics 164. Springer, 1996.

三　筛法、局部阻塞、almost-primes 与分布工具

[17] Brun, V. “La série $1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + \cdots$, où les dénominateurs sont ‘nombres premiers jumeaux’, est convergente ou finie.” *Bulletin des Sciences Mathématiques* 43 (1919), 100–104, 124–128.

[18] Selberg, A. “On an elementary method in the theory of primes.” *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger* 19 (1947), 64–67.

[19] Halberstam, H.; Richert, H.-E. *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.

[20] Greaves, G. *Sieves in Number Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 43. Springer, 2001.

[21] Bombieri, E. “On the large sieve.” *Mathematika* 12 (1965), 201–225.

[22] Vinogradov, A. I. “The density hypothesis for Dirichlet *L*-series.” *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* 29 (1965), 903–934; correction 30 (1966), 719–720.

四　小间隔、Twin、prime tuples 与等差结构

[23] Goldston, D. A.; Pintz, J.; Yıldırım, C. Y. “Primes in tuples I.” *Annals of Mathematics* 170 (2009), no. 2, 819–862.

[24] Zhang, Y. “Bounded gaps between primes.” *Annals of Mathematics* 179 (2014), no. 3, 1121–1174.

[25] Maynard, J. “Small gaps between primes.” *Annals of Mathematics* 181 (2015), no. 1, 383–413.

[26] D. H. J. Polymath. “Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes.” *Research in the Mathematical Sciences* 1 (2014), Article 12.

[27] Green, B.; Tao, T. “The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions.” *Annals of Mathematics* 167 (2008), no. 2, 481–547.

[28] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. “Some problems of ‘Partitio Numerorum’; III.” *Acta Mathematica* 44 (1923), 1–70.（亦为 Hardy–Littlewood prime-tuple 启发式与奇异级数的重要来源。）

[29] Schinzel, A.; Sierpiński, W. “Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers.” *Acta Arithmetica* 4 (1958), 185–208; erratum 5 (1959), 259.

五　经典素数关系、窗口、多项式与因子身份

[30] Ribenboim, P. *The Little Book of Bigger Primes*, 2nd ed. Springer, 2004.

[31] Ribenboim, P. *The New Book of Prime Number Records*, 3rd ed. Springer, 1996.

[32] Dickson, L. E. *History of the Theory of Numbers*, Vol. I: Divisibility and Primality. Carnegie Institution of Washington, 1919; reprinted by Chelsea.

[33] Grimm, C. A. “A Conjecture on Consecutive Composite Numbers.” *The American Mathematical Monthly* 76 (1969), no. 10, 1126–1128.

[34] Erdős, P. “Quelques problèmes de théorie des nombres.” *Monographies de L’Enseignement Mathématique* 6 (1963), 81–135.

[35] Shorey, T. N.; Tijdeman, R. “Arithmetic Properties of Blocks of Consecutive Integers.” In: J. Sander, J. Steuding, R. Steuding (eds.), *From Arithmetic to Zeta-Functions*. Springer, 2016, 455–471.

[36] Bunyakovsky, V. Ya. “Sur les diviseurs numériques invariables des fonctions rationnelles entières.” *Mémoires de l’Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1857.（关于多项式取素数值的经典来源；现代整理可参 [30][31]。）

六　全局谱、素数定理与乘法数论

[37] Davenport, H. *Multiplicative Number Theory*, 3rd ed., revised by H. L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics 74. Springer, 2000.

[38] Iwaniec, H.; Kowalski, E. *Analytic Number Theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications 53. AMS, 2004.

[39] Montgomery, H. L.; Vaughan, R. C. *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 97. Cambridge University Press, 2007.

[40] Edwards, H. M. *Riemann's Zeta Function*. Academic Press, 1974; Dover reprint, 2001.

[41] Titchmarsh, E. C. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown. Oxford University Press, 1986.

七　有限素性证书、算法与可执行验证

[42] Pocklington, H. C. "The determination of the prime or composite nature of large numbers by Fermat's theorem." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 18 (1914), 29–30.

[43] Adleman, L. M.; Pomerance, C.; Rumely, R. S. "On distinguishing prime numbers from composite numbers." *Annals of Mathematics* 117 (1983), no. 1, 173–206.

[44] Atkin, A. O. L.; Morain, F. "Elliptic curves and primality proving." *Mathematics of Computation* 61 (1993), no. 203, 29–68.

[45] Crandall, R.; Pomerance, C. *Prime Numbers: A Computational Perspective*, 2nd ed. Springer, 2005.

[46] Cohen, H. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. Graduate Texts in Mathematics 138. Springer, 1993.

八　综合教材、历史与进一步阅读

[47] Apostol, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.

[48] Niven, I.; Zuckerman, H. S.; Montgomery, H. L. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. Wiley, 1991.

[49] Montgomery, H. L.; Vaughan, R. C. "The large sieve." *Mathematika* 20 (1973), 119–134.

[50] Iwaniec, H. "Sieve methods." Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978, 43–52.

[51] Vaughan, R. C. *The Hardy–Littlewood Method*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1997.

[52] Tenenbaum, G. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, 3rd ed. Graduate Studies in Mathematics 163. AMS, 2015.

[53] Granville, A. "Harald Cramér and the distribution of prime numbers." *Scandinavian Actuarial Journal* 1995, no. 1, 12–28.

[54] Guy, R. K. *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd ed. Springer, 2004.

[55] Narkiewicz, W. *The Development of Prime Number Theory: From Euclid to Hardy and Littlewood*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2000.

[56] Pintz, J. "Landau's problems on primes." *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* 21 (2009), 357–404.
（兼具历史综述与现代进展梳理，适合作为 Landau 四题的总体参考。）

参考文献使用说明

本书正文可按以下原则调用上述书目：

- 涉及素数史、Goldbach–Euler 通信、Polignac 与 Landau 四题时，优先参照 [1]–[10]、[30]–[32]、[55]–[56]；
- 涉及 Goldbach、三素数问题、Chen 型关系与圆法时，参照 [11]–[16]、[51]；
- 涉及局部阻塞、筛法、almost-prime、粗糙数与有限控制时，参照 [17]–[22]、[38]、[50]；
- 涉及 Twin、固定差、prime tuples、有界间隔与等差素数结构时，参照 [23]–[29]；
- 涉及多项式轨道、窗口、因子集合与经典猜想时，参照 [30]–[36]、[54]；
- 涉及 ζ、L-函数、PNT、RH / GRH 与全局谱接口时，参照 [5]–[8]、[37]–[41]；
- 涉及有限素性认证、机器验收与 RenSpectrum 的执行思想时，参照 [42]–[46]。

本书提出的“固定算术身份谱—原子关系母体—有限移动视界—关系筛—量词证书—RenSpectrum”体系属于本书自身的理论构造；外部参考文献用于交代经典对象、历史来源、标准定理与传统方法的位置，不替代本书内部的定义与证明链。

后记　统一之后，新的征程开始

七篇写到这里，一条从整数身份到经典命题、再到可执行关系语言的道路已经合拢。

但这本书如果真正完成了它的目标，那么此处不应被理解为“素数研究的结束”。

它更像一次研究重心的迁移。

过去，当人们说到素数问题，最容易想到的是一串名字：Goldbach、Twin、Polignac、Legendre、Oppermann、Brocard、Bunyakovsky、Schinzel H、Grimm、Erdős–Woods……每一个名字背后都有自己的历史、技术传统、局部突破与漫长等待。

这种以具名问题为中心的历史是真实的，也是伟大的。

但历史的顺序不一定必须永远成为理论的顺序。

本书七篇所做的工作，是把这些名字重新拆回底层：

身份 → 原子 → 关系 → 视界 → 筛与证书 → 量词 → 经典命题.

当这条链建立以后，我们再回头看那些经典问题，它们的位置已经发生变化。

它们仍然重要，却不再是理论的起点。

它们成为共同母体的读出。

一　七篇不是七套理论，而是同一个对象的七层展开

第一篇固定整数身份，并在共享奇数坐标中建立原子生成与关系整行出生。

第二篇把无限母体压入有限移动视界，使每个有限对象拥有真实死亡、终端认证和永久保存的履历。

第三篇展开关系几何，把固定和、固定差、固定积、仿射、模板、等差、窗口与一般量词放进同一个关系语言。

第四篇进入有限控制几何，并在固定和值方向建立终端饱和型关系筛。

第五篇处理没有共同终端的无限关系，在单位固定差方向建立持续非灭绝型关系筛和跨视界累计证书。

第六篇把经典命题与经典方法一起放回母体，建立关系切片全集、形式证明规范、方法能力边界和高阶—低阶信息传递纪律。

第七篇把这些对象编译为 RenSpectrum，使理论可以被执行、复核、扩展和重新组合。

所以七篇不是七种思想的拼接。

它们共同形成一条主线：

同一张固定谱，产生同一个关系母体；

同一个关系母体，通过不同切片与量词呈现不同经典问题。

二　Goldbach 与 Twin：两种最基本全局关系的同时落位

Goldbach 与 Twin 在这本书里具有特殊地位。

不是因为其他问题不重要，而是因为它们分别占据统一关系理论的两种基本极端。

Goldbach 要求：

每一个固定和值纤维都必须出现见证。

Twin 要求：

固定单位差纤维必须向无穷远持续出现见证。

前者是逐目标全称；后者是无限回归。

前者通过有限终端完成绝对清算；后者通过不断移动的平方视界完成持续认证。

因此，本书对 Goldbach 与 Twin 的处理从一开始就不是“两道题，两套技巧”。它们的原子身份相同，关系出生机制相同，关系履历相同，和—差坐标相同，有限认证原则相同；真正不同的是读出方向和量词结构。

也正因为如此，它们的证明具有超出两个单题的意义。

如果只说“解决了两个著名猜想”，仍然没有说到本书真正想留下的东西。

更重要的是：

两个最著名的二原子关系，第一次在同一个母体中获得统一的生成解释与证明语言。

而当这一步完成以后，一批其他经典命题也不再需要拥有各自孤立的底层对象。固定差族、加权反射、有限模板、等差链、窗口占据、多项式轨道、完整因子集合、谱关系，都能够在同一套语言中定位，并调用与自身量词相匹配的证明与证书体系。

从这个意义上说，本书的成果不是一个孤零零的“QED”。

它是一组 QED 背后的共同语法。

三　“一揽子解决”的真正含义：不再为每个猜想重建世界

数学中的“猜想”从来不是一个应当被轻视的词。

猜想意味着结构先于证明被看见。Goldbach、Polignac、Riemann、Bunyakovsky、Schinzel 等名字之所以留在历史中，正因为这些问题曾经把未来数学的方向提前暴露出来。

因此，本书所谓从“一个个猜想”走向“一揽子解决”，不是说未来不再需要猜想，也不是说一个公式能够机械消灭所有素数问题。

它真正结束的是另一种重复：

> 每出现一个新的素数问题，就重新为它建造一套底层对象、重新解释一次素数身份、重新寻找一种完全孤立的关系语言。

统一素数关系理论建立以后，一个新问题首先可以被编译，而不是被孤立。

它需要说明：

1. 关系轨道是什么；
2. 端点要求什么身份；
3. 有限实例在哪里终端认证；
4. 哪些信息必须关系保真；
5. 外层量词是什么；
6. 证书如何与量词匹配；
7. 现有方法能够作用到哪个层级。

于是，猜想名称从“整个世界”变成“统一母体中的一个地址”。

这就是“一揽子”的真正含义。

不是把所有答案写成同一句话，而是把所有问题送回同一个可复用的底层世界。

四　证明之后，真正庞大的工作转向后端

一个时代里，最显眼的工作往往是解决前端问题：命题真还是假？证明在哪里？

当底层对象被统一以后，新的工作会大量转向后端。

第一项工作是**形式化**。

统一理论中的定义、定理、边界、终端、接缝、量词和证书，应继续压缩成可以由证明助理、独立程序和不同研究者重复执行的形式对象。证明不只要“能读懂”，还应逐步走向“能重放”。

第二项工作是**独立复核**。

Goldbach、Twin 以及本书中其他新结论，不应依赖作者身份获得力量。真正成熟的成果，应能够脱离原始叙述，被第三方重新定义、重新推导、重新计算、重新验证。

第三项工作是**证书压缩**。

一个命题有证明，并不意味着我们已经找到最好的证明形态。哪些关系履历是真正必要的？哪些字段可以安全压缩？一个全称命题的最短有限证书是什么？一个无限关系的最小累计证书是什么？这些都会形成新的复杂度问题。

第四项工作是**关系库扩展**。

二原子关系只是开始。三元、四元、一般 k-元关系，仿射束、非线性轨道、稀疏指数轨道、混合加乘结构、因子集合匹配、多层量词，都可以继续进入统一母体。

第五项工作是**传统方法的再定位**。

筛法、圆法、大筛、谱方法、L-函数、组合方法、概率模型和计算方法不会因为统一关系理论而退出历史。恰恰相反，当对象层被统一以后，我们第一次可以更精确地说明：某一种方法究竟保存了关系的哪一部分信息，又在哪一层发生了损失。

第六项工作是 **RenSpectrum 的开放化**。

未来的工作台不应只是展示实例。它可以成为关系定义库、证书仓库、反例搜索器、有限视界扫描器、方法适配器、机器证明入口和开放协作平台。

到了那时，一个新的素数关系不必从空白开始。

它可以继承整个母体。

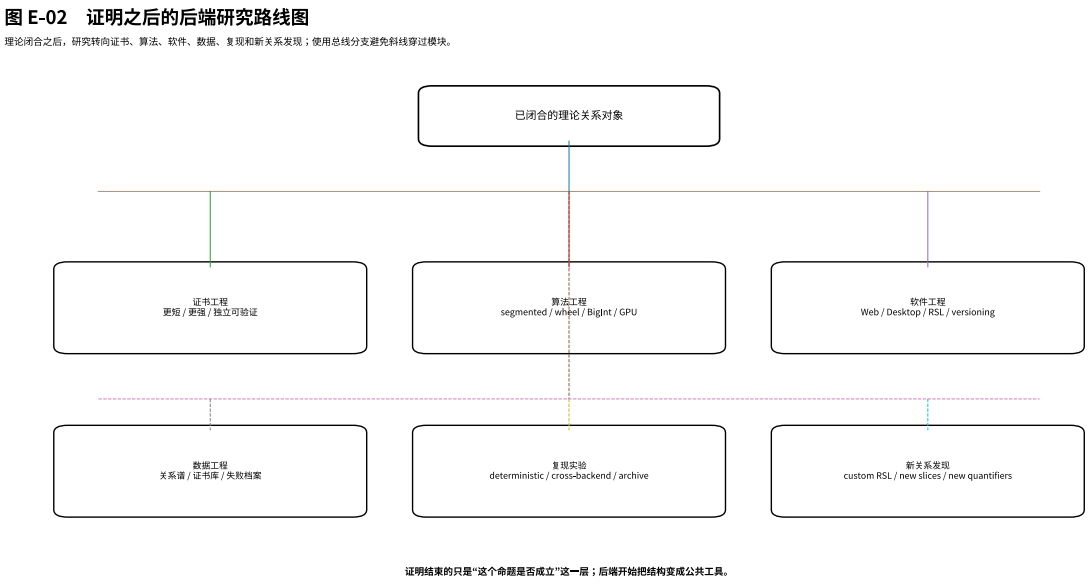


图 E-02　证明之后的六条后端路线。 后记把证明完成之后的工作分成六条并行路线：把定义、定理、终端、接缝、量词与证书推进到可重放的形式化对象；让第三方能够独立重定义、推导、计算与验证；继续压缩有限证书和累计证书；把二原子关系扩展到一般 k-元、仿射束、非线性/指数轨道、因子匹配与多层量词；重新标定筛法、圆法、L-函数、组合、谱与计算方法各自保存的信息；并把 RenSpectrum 开放为关系库、证书库、反例搜索器、机器证明入口与协作平台。

五　一个时代有一个时代的使命

古希腊数学的重要使命之一，是把数的经验变成证明。

Euler、Gauss、Dirichlet、Riemann 所在的时代，把素数从离散观察推进到级数、分布、同余与复分析。

二十世纪建立了圆法、筛法、大筛、指数和、L-函数以及越来越精密的统计与谱工具。

二十一世纪又把大规模计算、形式验证、自动推理和开放协作带入数学。

每一个时代都不是靠否定前一个时代前进。

新的使命，往往出现在旧成果已经足够丰富、足够强大，却开始需要重新组织的时候。

对于素数关系，也许现在正处在这样一个节点。

过去的任务常常是：

> 一道问题一道问题地向前攻。

新的任务可以是：

> 找到这些问题共同依赖的关系世界，让新问题不必反复重建相同的地基。

这不是让数学变得机械。

恰恰相反，只有共同地基被抽出来以后，创造力才不必浪费在重复搭建旧结构上。

真正新的工作，才能集中到真正新的关系、新的量词、新的证书和新的结构上。

六　从“素数猜想目录”走向“素数关系科学”

如果把历史上的素数问题列成目录，我们会得到一串极其耀眼的名字。

如果把它们送回统一关系母体，我们看到的则是另一幅图景：

Goldbach 是固定和值的逐参数全称；

Twin 是单位固定差的无限回归；

Polignac 是整个固定偶差族；

Legendre、Oppermann、Brocard 是不同窗口几何；

Green–Tao 是任意长度等差关系；

Hardy–Littlewood prime tuples 是固定偏移模板；

Bunyakovsky 与 Schinzel H 是多项式轨道及其束；

Grimm 与 Erdős–Woods 读取的是完整素因子身份，而不是单一素数指示函数；

RH / GRH 则从局部关系语言进入全局谱接口。

名字没有消失。

它们获得了位置。

当一个领域从“问题名字的集合”走向“对象、关系与变换的系统”，通常意味着它正在形成更成熟的理论形态。

本书希望推动的，正是这种变化：

从素数猜想的集合 → 素数关系的科学。

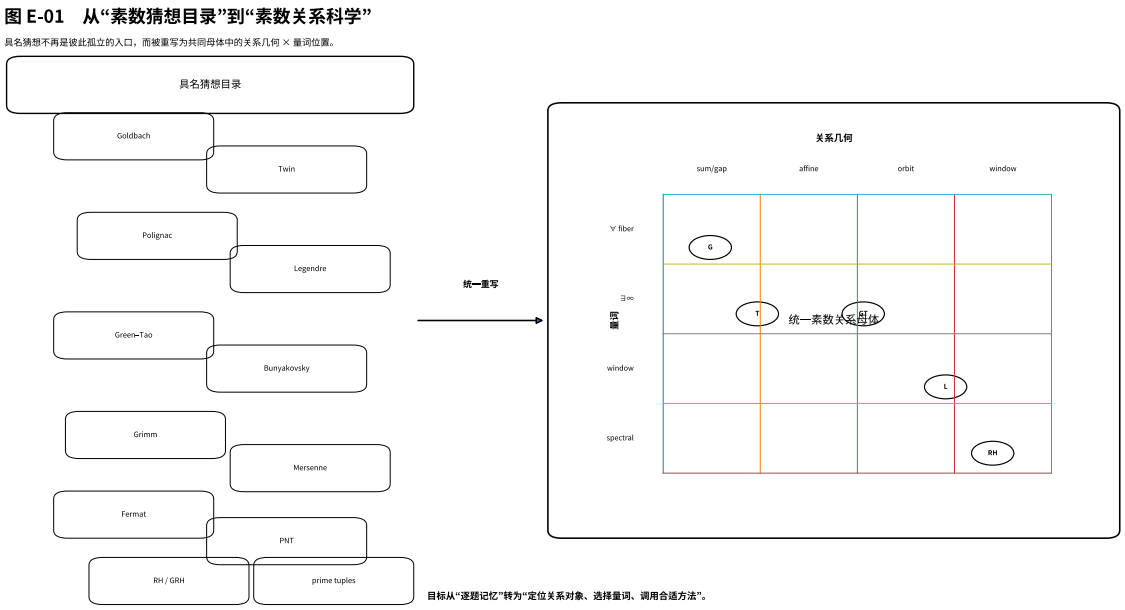


图 E-01　从“猜想目录”到“素数关系科学”。 后记把 Goldbach、Twin、Polignac、Legendre、Green–Tao、Bunyakovsky、Schinzel H、Grimm、Erdős–Woods、RH/GRH 等具名问题送回共同母体后，它们不再只是彼此孤立的题名，而分别获得固定和、固定差、窗口、仿射/模板、轨道、完整因子身份、统计/谱等关系位置，以及与之匹配的外层量词。名字保留，但底层对象、关系语言和证书接口开始共享。

七　统一以后，远方反而第一次清晰

统一素数关系，并不会让素数失去神秘感。

它只会把神秘感从“为什么这个具名猜想如此困难”转移到更深的问题：

- 原子关系母体还有哪些尚未被识别的天然几何？
- 不同关系之间是否存在新的无损投影、对偶与守恒？
- 证书复杂度能否形成自己的层级理论？
- 哪些高阶关系能够真正向低阶关系输送见证，而不是只输送平均密度？
- 是否存在比平方视界、Primorial 视界更自然的自适应视界？
- 关系语言能否成为自动发现新定理的搜索空间？
- 一个开放的 RenSpectrum 能否让人和机器共同维护一张不断扩展、同时保留完整证明履历的算术关系谱？
- 当关系母体扩展到更高阶以后，还会出现哪些现在甚至没有被命名的问题？

这些问题已经不是旧猜想的简单续篇。

它们属于统一之后的新世界。

图 E-03　统一之后的未来研究空间

新的征程不只沿着"更多猜想"展开，而是在对象、关系、量词、证书、算法和语言六个方向同时扩展。

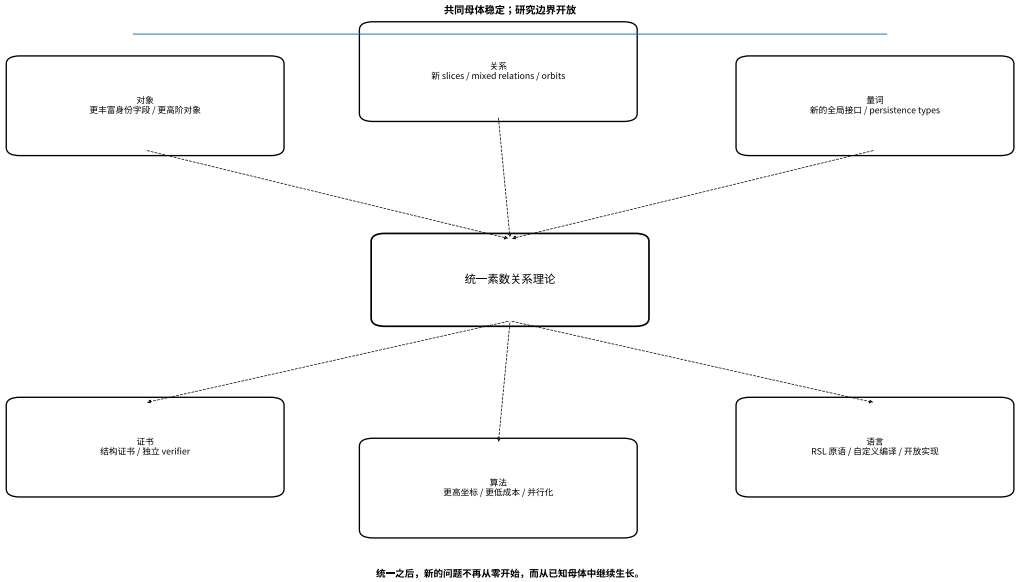


图 E-03　统一之后的未来研究空间。 后记提出的未来问题围绕八个方向展开：寻找原子关系母体中尚未识别的天然几何；发现关系之间新的无损投影、对偶与守恒；建立证书复杂度层级；寻找真正把高阶见证输送到低阶命题的传递机制；研究比平方/Primorial 更自然的自适应视界；把关系语言变成自动定理发现的搜索空间；让人和机器共同维护保留完整履历的开放关系谱；以及在高阶母体中寻找今天尚未被命名的新问题。

几百年来，Goldbach 与 Twin 像两座孤峰，人们一次次从不同方向接近它们。

本书尝试做另一件事：不仅攀登山峰，也把山脉的地形画出来。

当两座山峰被看见属于同一块大陆时，道路不再彼此孤立。

而地图真正画出以后，远方不会减少。

远方反而第一次变得可以辨认。

所以，这本书最后愿意留下的，不是一句"问题到此结束"。

而是：

统一了素数关系，新的征程才刚刚开始。

每一个素数都孤独，但没有一个素数真正孤立

写完这本书，我并不想让它停在 Goldbach、Twin，或者任何一个猜想的名字上。

因为真正吸引我的，从来不只是某一道题最终得到怎样的答案。

两千多年来，人们一次又一次走近素数。

有人研究它们怎样分布。

有人研究两个素数怎样相加。

有人追问固定的差是否会无穷次出现。

有人研究筛法、圆法、解析函数、概率模型、谱、计算和越来越精细的算术结构。

不同年代的人，选择了不同入口。

这些道路彼此竞争，也彼此滋养。

而当我们把目光从一个个具名问题稍稍移开，也许会看见另一幅图景：

Goldbach 研究的，是固定和值关系。

Twin 研究的，是固定差关系的无限回归。

素数等差数列、窗口问题、素数模板、指数轨道、统计分布与谱结构，也都可以被重新理解为——

同一批算术对象，在不同关系、不同视界和不同量词之下的不同读出。

于是，这本书最终想做的，并不是把所有数学压缩成一种方法。

恰恰相反。

它想保留每一种方法最自然的位置，同时把它们放回一个共同的关系母体中。

因为一个素数看起来很孤独。

它不能被两个更小的非单位整数拆成一个简单乘积。把它单独写在数轴上，每一个都像拥有自己的位置、自己的距离、自己的沉默。

人有时候也很像这样。

每个人都有不可替代的位置，都不能被另两个人“分解”出来。我们的经历、记忆、爱与失去，不会因为找到统计规律就被消除。

可素数从来没有真正孤立。

它们共同生活在同一个自然数结构中；它们通过乘法重建几乎整个算术世界；它们又通过和值、差值、窗口、轨道和更高阶关系彼此照见。

我们研究素数的联系，有时很像人在寻找人间的温暖。

不是为了消灭彼此的独立。

而是为了知道：

独立并不等于孤绝。

一个人可以像一个素数那样保持自己的不可替代性，同时仍然属于更大的关系网络。

数学家也是如此。

研究解析数论的人、筛法的人、组合的人、谱理论的人、概率的人、计算的人，甚至对同一个问题持完全不同判断的人，都可能从不同位置，共同增加数学的分辨率。

数学之所以繁荣，从来不只是因为所有人走向同一扇门。

它也因为很多人从不同方向出发，在很远的地方彼此照见。

在这本书走到最后的时候，我也想把感谢留给那些一直真实存在于我生命关系中的人。

感谢我的父母。

许多最重要的支持，并不总是以语言出现。它可能只是长久的陪伴、理解、牵挂，和在我看不见的时候始终存在的托举。

感谢 Matrix 的小伙伴。

你们是我写作和研究过程中的第一批读者。

每当有新的进展，我常常会第一时间发给你们看。有时候，那已经是连续工作到深夜，甚至通宵之后，但在准备休息之前，我还是会发一张截图给你们，告诉你们：今天又往前走了一点。

很多时候，你们未必参与具体的数学推导，但你们一直在。

这种陪伴让我在漫长的写作和研究过程中没有那么孤独，也让我知道，当一个想法终于被写下来、一个问题终于向前推进时，总有人愿意第一时间看见它。

正是这种很日常、很安静的陪伴，支撑着我一路走到了这里，也支撑着我最终写完了这本书。

也感谢每一个认识我的人，和每一个我有幸认识的人。

有些人陪伴很久，有些人只是短暂经过；有些关系清晰而深刻，有些甚至只留下一个很小的片段。

但人与人的相遇，本身就会改变彼此所处的世界。

如果这本书一直在讨论“对象如何在关系中出现”，那么我自己的生命大概也是如此。

没有任何一个人完全由自己构成。

我们都带着别人留下的语言、善意、误解、帮助、争论、记忆与温度，继续成为今天的自己。

所以，如果这本书最终留下什么，我希望不只是一组关于 Goldbach、Twin 与经典素数命题的证明。

我更希望它留下一个更简单的图景：

每一个对象都可以保留自己的身份；

每一种关系都值得被准确保存；

每一个问题都应该在属于自己的量词下被理解；

而那些看起来彼此遥远的数学，也许一直生长在同一片土地上。

如果每个人都像一个素数，

那么愿我们保留自己的不可替代，

也仍然能够在关系中彼此找到。

因为我们寻找的，从来不只是一个数的秘密。

有时候，我们是在借数学确认：

孤独可以是真实的，而联系也同样真实。

内容提要

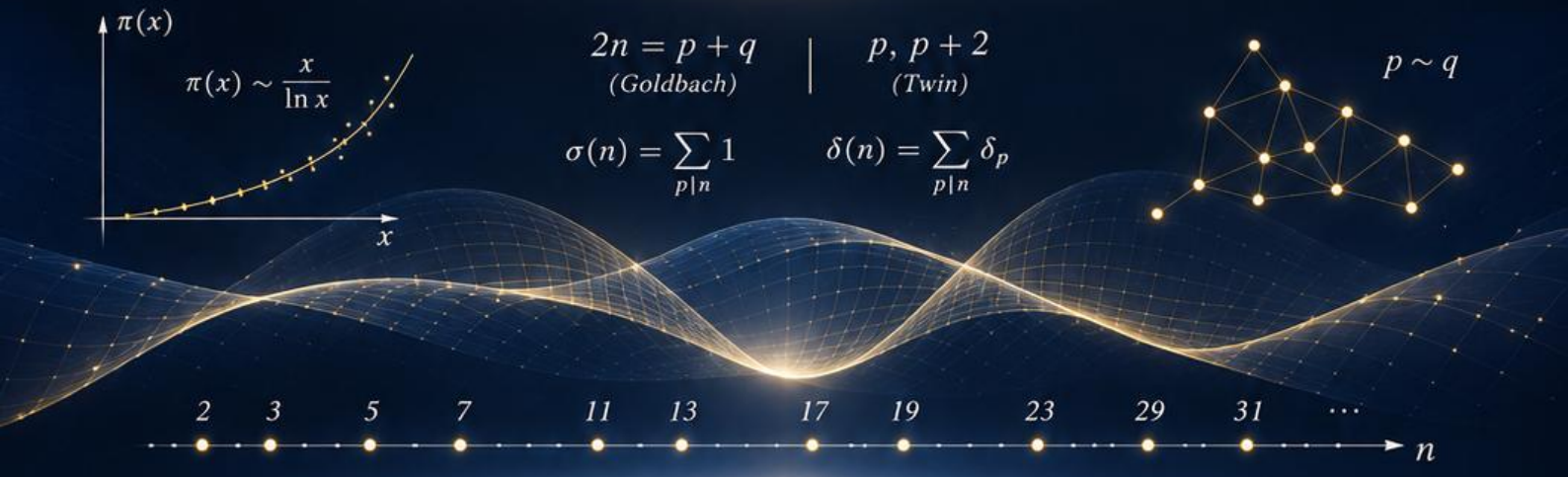
本书围绕“统一素数关系理论”这一核心命题展开，试图把长期以来以分散形态出现的经典素数问题，重新放回同一个底层对象、同一套关系语言与同一套有限认证结构中理解。全书从固定算术身份谱出发，建立共享奇数坐标中的原子关系母体，随后引入有限移动视界、关系切片、量词结构与关系筛，并在这一统一框架下系统处理 Goldbach、Twin 以及一批经典素数命题。

在本书中，Goldbach 不再只是一个孤立的固定和值问题，Twin 也不再只是另一套独立的固定差问题。它们被放回同一个原子关系母体中：前者体现为终端饱和型关系筛，后者体现为持续非灭绝型关系筛。由此，素数问题第一次以“共同母体—不同读出”的方式获得统一表达。

七篇结构依次展开：第一篇建立固定算术身份谱与原子关系母体；第二篇建立有限移动视界与永久保存；第三篇建立关系切片、导出几何与量词结构；第四、第五篇分别处理 Goldbach 与 Twin 的核心证明链；第六篇汇总经典命题的形式证明与方法边界；第七篇给出 RenSpectrum 可执行实现与开放关系语言。

本书不仅致力于给出重要经典命题的证明，更试图改变素数研究的组织方式：统一底层对象而不强迫统一方法，统一关系语言而不抹平问题差异，使后续素数研究能够从“逐个猜想”转向“统一关系世界中的系统展开”。

统一了素数关系，新的征程才刚刚开始。



任毅飞

ISBN 978-7-XXXX-XXXX-X
9 787XXX XXXXX